

***„A robotika története,  
vívmányai, jövője; interaktív foglalkozás”***

valamint

***„Tudományos művek  
összeállítása és szerkesztése - szeminárium”***

2021. november 25. „Tudományos művek összeállítása és szerkesztése”

2021. november 26. „A robotika története, vívmányai, jövője; interaktív foglalkozás”

2021. december 4. – „A robotika története, vívmányai, jövője; interaktív foglalkozás”

**Galambos Péter**

-

**ROBOTTECHNIKAI SZAKKOLLÉGIUM**

NTP-SZKOLL-20-0043 Robottechnikai Szakkollégium - Tehetséggondozás és szakmai közösségépítés az OE  
ROSZ-ban – 1 000 000 Ft támogatás



---

# ROBOTTECHNIKA ALAPJAI (NBXRT1IBNE)

## III. ANYAGI PONT MOZGÁSA

---

Összeállította: Takács Mátyás  
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

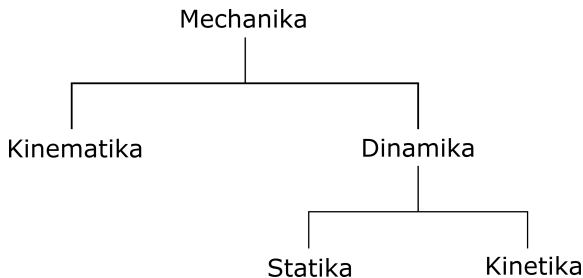
2021. november 23.  
Budapest

**ÓBUDAI EGYETEM**  
**BEJCY ANTAL INTELLIGENS**  
**ROBOTTECHNIKAI KÖZPONT**



- ① A mechanika területei
- ② Mozgó pont helyzetének leírása
- ③ A mozgás sebessége
- ④ A mozgás gyorsulása
- ⑤ Az anyagi pont speciális mozgásai
- ⑥ Hasznos linkek

A **mechanika** a testek mozgásával és a mozgás (vagy nyugalom) okaival foglalkozik.



A **kinematika** (mozgástan) a mozgásokat írja le, a mozgások okaival nem foglalkozik.

A **dinamika** (erőtan) a mozgás okainak leírásával, illetve a mozgást kiváltó hatásokkal foglalkozik.

Az erőtan nyugvó rendszereket vizsgáló területe a **statika**, mely az egyensúly állapotát és feltételeit írja le.

A dinamika másik területe a **kinetika**, amely a mozgások okait vizsgálja.

Jelen fejezetben az anyagi pont kinematikájával foglalkozunk, a merev test kinematikáját a következő modul taglalja.

#### DEFINÍCIÓ: ANYAGI PONT

Az anyagi pont olyan test melynek méretei a vizsgálat szemszögéből elhanyagolhatóak, mozgása egyetlen pontjának mozgásával jellemezhető.

A kinematikai vizsgálatok során három kérdésre keressük a választ:

- Mi mozog?
- Hol mozog?
- Hogyan mozog?

A mozgó objektum tulajdonsága szerint lehet:

- anyagi pont
- anyagi pontrendszer
- merev test
- merev testekből összetett rendszerek
- deformálható testek, stb...

A pálya vizsgálata megadja, hogy a mozgó objektum hol mozog.

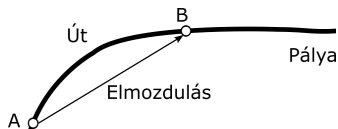
## DEFINÍCIÓ: PÁLYA

Pályának nevezzük a mozgó anyagi pont által befutott térgörbét.

A pálya alakja szerint az alábbi mozgásokról beszélhetünk:

- egyenes vonalú mozgás
- speciális síkmozgás (pl. a körmozgás)
- általános síkbeli mozgás
- általános térbeli mozgás

A pálya meghatározott szakasza az **út**, amelyet az anyagi pont mozgása során a célszerűen kijelölt  $A$  és  $B$  pontok között befut.



Az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő  $\overrightarrow{AB}$  vektort **elmozdulásvektornak** nevezzük.

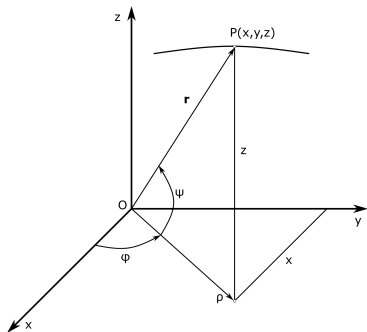
A mozgás fontos jellemzője a mozgás változása (sebesség), amit az időegység alatt befutott úttal jellemezzük. Eszerint a mozgás lehet:

- egyenletes (állandó sebességű)
- egyenletesen változó (állandó gyorsulású)
- egyenetlenül változó (változó gyorsulású)

A sebesség és a gyorsulás fogalmát később tárgyaljuk részletesebben.



Az anyagi pont helyzetét a térben egy célszerűen rögzített és irányított koordináta-rendszerhez képest kell megadni, illetve vizsgálni. Megállapodás szerint *Descartes*-féle jobbsodrású koordináta-rendszert használunk, melynek  $O$  az origója és  $x$ ,  $y$  és  $z$  a tengelyei. A tetszőlegesen kiválasztott, de azután rögzített koordináta-rendszerben az anyagi pont pillanatnyi helyzete az



$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = xi + yj + zk$$

**helyvektorral** adható meg. A  $P(x, y, z)$  koordinátájú pont jelzi az anyagi pont pillanatnyi helyzetét.

## MOZGÁSTÖRVÉNY

A **mozgástörvény** az anyagi pont helyzetét (a helyvektort az idő függvényében) írja le:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Amennyiben az  $\mathbf{r}$  helyvektor az idő függvénye, akkor összetevői (koordinátái) is azok, vagyis:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

Hengerkoordinátákkal kifejezve:

$$\rho = \rho(t), z = z(t), \phi = \phi(t)$$

Illetve polárkoordinátákkal kifejezve:

$$r = r(t), \phi = \phi(t), \psi = \psi(t)$$

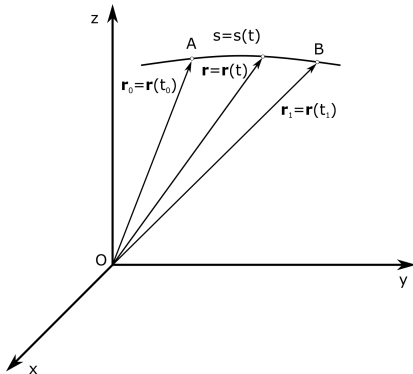
## MOZGÁSPÁLYA

Adott idő alatt az anyagi pont által befutott pályát **mozgáspályának** nevezzük. A helyvektorok a mozgás során minden időpillanatban a mozgáspálya egy-egy pontjába mutatnak, azaz a mozgáspályát a helyvektorok végpontjai írják le.

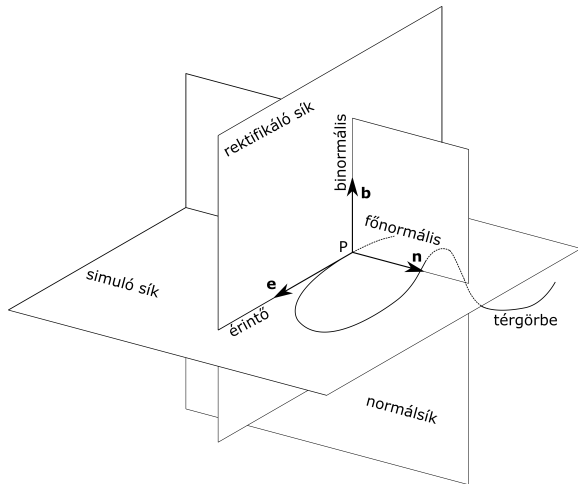
## PÁLYABEFUTÁSI TÖRVÉNY

A mozgáspálya ismeretében az anyagi pont mozgása egyértelműen megadható egy előjeles skálár-skalár függvénnyel is. Ezt **pályabefutási törvénynek** nevezzük:

$$s = s(t)$$



A mozgás pályája minden esetben valamilyen térgörbe, amely határesetben lehet egyenes vagy akár kör is. A térgörbe egy tetszőlegesen választott  $P$  pontjában értelmezünk három egymásra merőleges egyenest, illetve síkot.



## ÉRINTŐ EGYENES

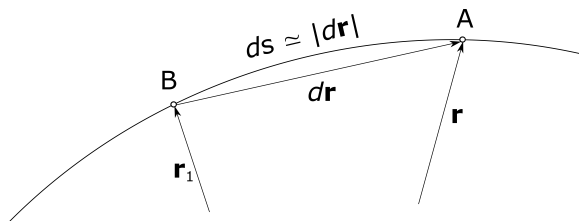
Az érintő egyenes nem más, mint a térgörbe  $AB$  szelőjének határhelyzete, amikor  $B$  tart  $A$ -hoz. A szelő iránya:

$$\Delta r = r - r_1$$

Ennek határértéke:

$$dr = \lim_{B \rightarrow A} \Delta r$$

mely érintő irányú vektor.



## ÉRINTŐ EGYENES

Az érintő irányú egységvektor:

$$e = \frac{dr}{|dr|} = \frac{dr}{ds}$$

Az érintő egyenes irányát és egyben a mozgás irányát az  $e$  érintő irányú egységvektor iránya határozza meg.

## NORMÁLSÍK

A **normálsík** a  $P$  pontot tartalmazó, érintőre merőleges sík. Azon egyenesek, melyek illeszkednek a  $P$  pontra és a normálsíkban helyezkednek el, a görbe  $P$  pontbeli normálisai.

## ÉRINTŐSÍK

Az **érintősík** a  $P$  ponton átmenő, normálsíkra merőleges sík, mely tartalmazza az érintő egyenest.

## FŐNORMÁLIS

A normálsíkban elhelyezkedő,  $P$  ponton átmenő, érintőre merőleges egyenes a **főnormális egyenes**.

## NORMÁLVEKTOR

A **normálvektor** a főnormális egyenes irányába mutató vektor:

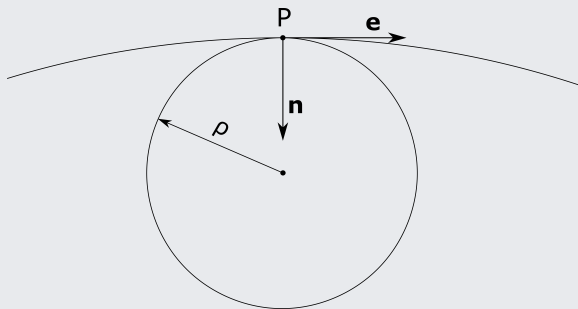
$$\mathbf{n} = \frac{\frac{d\mathbf{e}}{ds}}{\left| \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\mathbf{e}}{ds}$$

ahol  $d\mathbf{e}$  az érintő irányú egységvektor változása,  $\rho$  a görbületi sugár.



## GÖRBÜLETI SUGÁR

A görbéhez  $P$  pontban simuló kör sugara a **görbületi sugár**



## GÖRBÜLET

A **görbület** a görbületi sugár reciproka, azaz a görbének az egyenestől való eltérését fejezi ki:

$$G = \frac{1}{\rho} = \left| \frac{de}{ds} \right| = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right|$$

### BINORMÁLIS EGYENES

A **binormális egyenes** a  $P$  ponton átmenő, érintősíkra merőleges egyenes.

### BINORMÁLIS EGYSÉGVEKTOR

A **binormális egységvektor** a binormális egyenes irányába mutató vektor:

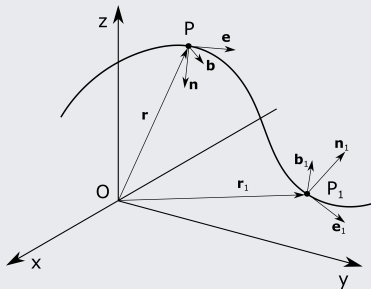
$$\mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$$

### REKTIFIKÁLÓ SÍK

A binormálist és az érintőt tartalmazó síkot **rektifikáló síknak** nevezzük.

## KÍSÉRŐ TRIÉDER

Az anyagi pont mozgásához hozzárendelhetünk egy úgynevezett természetes koordináta-rendszert, mely egységvektorai az imént definiált  $e$ ,  $n$  és  $e$  egységvektorok. Ezt a koordináta-rendszert **kísérő triéder**nek nevezzük. Az érintő egységvektor mindig a mozgás irányába, a normálvektor pedig a görbületi középpont felé mutat.



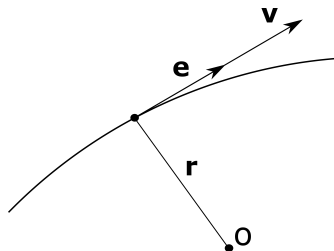
A mozgó anyagi pont gyorsulásának vizsgálatát végezhetjük kísérő triéder segítségével, amellyel egyszerűbbé válik a vizsgálat.

## SEBESSÉGVÉKTOR

A sebesség (időegység alatt befutott út) az anyagi pont mozgásának fontos jellemzője. A sebességet vektormennyiségként definiáljuk, a **sebességvektor** a mozgástörvény idő szerinti első deriváltja:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

A sebességvektor iránya megegyezik az érintő irányával.



A sebességvektor nagysága:

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

amennyiben  $|\Delta s| \simeq |\Delta r|$ .

A sebesség az érintő irányú egységvektorral kifejezve:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\mathbf{e}$$

A sebességvektor felírva koordinátás alakban:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = v_x + v_y + v_z$$

A fenti egyenletből a sebesség komponensei:

$$v_x = v_x i = \frac{dx}{dt} i = \dot{x} i$$

$$v_y = v_y j = \frac{dy}{dt} j = \dot{y} j$$

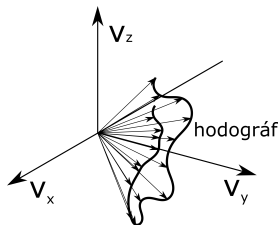
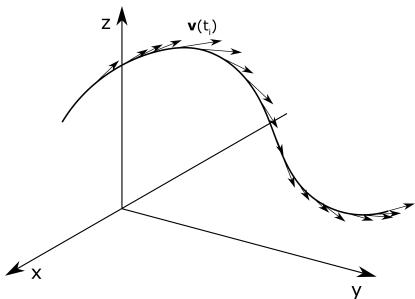
$$v_z = v_z k = \frac{dz}{dt} k = \dot{z} k$$

A sebességvektor nagysága:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

## HODOGRÁF

A **hodográf**ot megkapjuk, ha a mozgáspályához tartozó sebességvektorokat egy pontból felmérjük és a vektorok végpontját összekötjük.



## GYORSULÁSVEKTOR

A gyorsulás a sebesség idő szerinti első deriváltja, vagy a mozgástörvény idő szerinti második deriváltja:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

A **gyorsulásvektor** a hodográf érintője.

A gyorsulásvektor felírva koordinátás alakban:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_x + a_y + a_z\end{aligned}$$



A gyorsulásvektor komponensei tehát:

$$a_x = a_x i = \frac{dv_x}{dt} i = \frac{d^2 x}{dt^2} i$$

$$a_y = a_y j = \frac{dv_y}{dt} j = \frac{d^2 y}{dt^2} j$$

$$a_z = a_z k = \frac{dv_k}{dt} k = \frac{d^2 z}{dt^2} k$$

A gyorsulásvektor nagysága:

$$a = |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

## A GYORSULÁS LEÍRÁSA A TRIÉDEREK SEGÍTSÉGÉVEL

A sebességvektort fel tudjuk írni a következő alakban:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}$$

Ebből a gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e})}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e} + v\frac{d\mathbf{e}}{dt}$$

A második tagot át tudjuk alakítani a következőre:

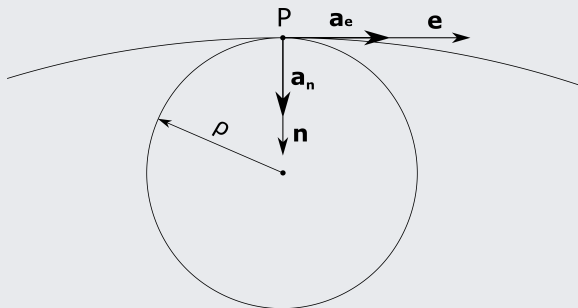
$$v\frac{d\mathbf{e}}{dt} = v\frac{d\mathbf{e}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{\mathbf{n}}{\rho}v = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$$

## A GYORSULÁS LEÍRÁSA A TRIÉDEREK SEGÍTSÉGÉVEL (FOLYTATÁS)

Tehát a természetes koordináta-rendszerben a gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} = a_e\mathbf{e} + a_n\mathbf{n}$$

ahol az  $a_e$  az érintő irányú (tangenciális), az  $a_n$  pedig a normál irányú (centripetális) gyorsulás összetevő.



## A MOZGÁS SZABADSÁGFOKA

Egy mechanikai rendszer helyzetének egyértelmű megadásához minimálisan szükséges (egymástól független) skalár mennyiségek száma. Például robotkarnál a függetlenül állítható pozíció komponensek.

Minden skalár kényszeregyenlet eggyel csökkenti a mozgás szabadságfokát, pl.:

- egyenes vonalú mozgás:  $S = 1$
- körmozgás (pl. inga):  $S = 1$
- síkmozgás:  $S = 2$

## KÖRMOZGÁS

A körmozgás a síkmozgás egyik speciális esete. Körmozgás esetén a mozgó anyagi pont pályája kör, melynek görbületes sugara ( $\rho = r$ ) állandó.

A mozgástörvény hengerkoordináta-rendszerben a  $|r| = R$  jelölést használva:

$$r = r(t) = Rn(t)$$

Ahol:

$$n = i\cos(\phi) + jsin(\phi)$$

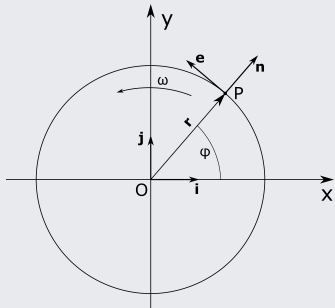
A  $P$  pont sebessége:

$$v = \dot{r} = R\dot{n} = R \frac{dn}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}$$

Ahol a  $\frac{d\phi}{dt} = \omega \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  **szögsebesség**, mely az időegység alatti szögelfordulást adja meg.

Illetve:

$$\frac{dn}{d\phi} = -isin(\phi) + jcos(\phi) = k \times n$$



## KÖRMOZGÁS (FOLYTATÁS)

A behelyettesítéseket elvégezve:

$$\mathbf{v} = R\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

A szögsebességet vektorként is értelmezhetjük:

$$\boldsymbol{\omega} = k\boldsymbol{\omega}$$

Ekkor a szögsebesség vektor a körpálya síkjára merőleges.

Általános helyzetű körmozgás esetén a sebesség:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Körmozgás esetén a gyorsulás:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

Ahol az  $\boldsymbol{\epsilon}$  a szögsebesség időbeni megváltozása, a **szöggyorsulás**:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

## KÖRMOZGÁS (FOLYTATÁS)

$\epsilon$ -t és a  $v = \omega \times r$  összefüggést felhasználva a gyorsulás:

$$a = \epsilon \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

A fenti egyenletet átrendezve:

$$a = \epsilon \times r + (\omega r)\omega - \omega^2 r$$

Mivel  $\omega \perp r$  ezért  $(\omega r)\omega = 0$ .

Tehát a  $P$  pont gyorsulása:

$$a = \epsilon \times r - \omega^2 r$$

A fenti összefüggés első tagja a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, amely:

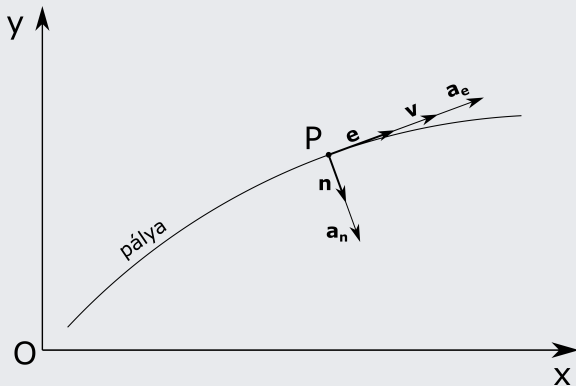
$$a_t = \epsilon \times r = R\epsilon$$

Az összefüggés második tagja pedig a centripetális (normál irányú) gyorsulás:

$$a_n = -\omega^2 r$$

## ÁLTALÁNOS SÍKMOZGÁS

Általános síkmozgás esetén az anyagi pont mozgás közben egy meghatározott síkban marad.



A síkmozgás szabadságfoka  $S = 2$  a  $z = 0$  kényszer miatt.



## ÁLTALÁNOS SÍKMOZGÁS (FOLYTATÁS)

Síkmozgás esetén a mozgástörvény:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

A sebességvektor:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$$

ahol

$$v_x = v_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

A síkmozgás gyorsulása:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = a_e\mathbf{e} + a_n\mathbf{n}$$

Az alábbi két link segíti megérteni az anyagi pont mozgását interaktív példákon keresztül:

- <https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d>
- <https://phet.colorado.edu/en/simulation/rotation>



Köszönöm a figyelmet!

---

# ROBOTTECHNIKA ALAPJAI (NBXRT1IBNE)

## IV. MEREV TEST MOZGÁSA

---

Összeállította: Nagy Tamás  
Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

2021. november 10.  
Budapest

**ÓBUDAI EGYETEM**  
**BEJCY ANTAL INTELLIGENS**  
**ROBOTTECHNIKAI KÖZPONT**



Az előző blokkban a pontszerű testek mozgásának leírásával foglalkoztunk. Most áttérünk azon testek mozgásának leírására, melyek kiterjedését már nem hagyhatjuk figyelmen kívül, ezeket kiterjedt testeknek nevezzük. A kiterjedt testeken belül is az ún. merev testekkel foglalkozunk. A merev testek kinematikáját a következő felosztásban tárgyaljuk:

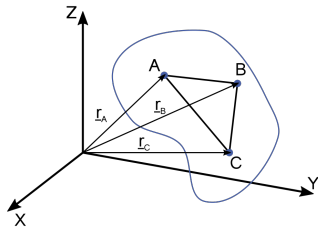
- ① Merev test fogalma
- ② Szögsebesség
- ③ Szöggyorsulás
- ④ Szabadsági fok fogalma, mechanizmusok

## DEF. MEREV TEST

Merevnek tekinthető az a test, mely pontjainak távolsága mozgás során nem változik, vagyis **bármely két pontjának távolsága időben állandó.**

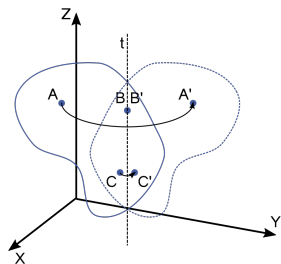
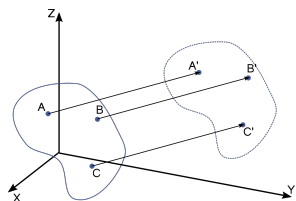
Ebből a definícióból adódik, hogy merev test alakja, térfogata szintén változatlan marad.

Merev test térbeli helyzete megadható bármely 3 nem egy egyenesbe eső pontjának helyzetével. A test helyzetét szemléletesebben megadhatjuk egy tetszőleges pontjának 3 koordinátájával (pozíció) és a test orientációjával, mellyel részletesen foglalkoztunk a transzformációkat feldolgozó blokkban.



Merev testek mozgásai két elemi mozgásfajtából tevődnek össze. Ezek egyike a **haladó mozgás (transzláció)**. Transzlációs mozgás során a test minden pontja egymással párhuzamos, egybevágó pályát ír le, a test orientációja pedig nem változik. A test mozgásának leírásához elegendő egyetlen pontjának mozgását leírnunk.

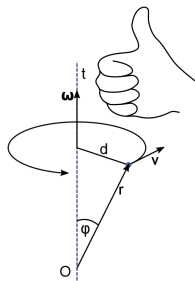
A másik mozgásfajta a **tengely körüli forgás (rotáció)**, amely során a forgástengelyen lévő pontok pozíciója nem változik, a test többi pontja pedig a forgástengelyre merőleges síkokban körpályán mozog.



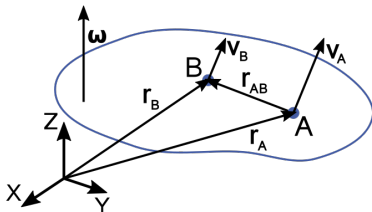
Ha a mozgás során **létezik olyan sík, amelyre merőleges irányban a test pontjainak nincs elmozdulása, síkmozgásról beszélünk**. Síkmozgás során a test lehetséges mozgásai: transláció az alapsíkkal párhuzamosan, illetve rotáció az alapsíkra merőleges tengely körül.

Merev test minden pontja egy bizonyos tengely körül ugyanazon szögsebességgel forog, máskülönben a test alakjának változnia kellene. Így definiálhatjuk a szögsebességvektort, amely

- párhuzamos a forgástengellyel,
- iránya a forgás irányából a jobbkéz szabály szerint,
- nagysága pedig a forgómozgás sebessége rad/sec-ben.







Síkmozgást végző merev test mozgásállapotát egyértelműen meghatározza két pontjának független mozgása, illetve egy pontjának mozgása és a test szögsebessége. A test két tetszőleges pontjának sebessége között az alábbi összefüggés írható fel:

#### TETSZŐLEGES PONTOK SEBESSÉGÉNEK KAPCSOLATA

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

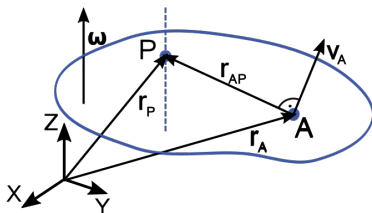
Síkmozgás esetén a létezik olyan  $P$  pont, mely sebessége 0:

$$\mathbf{v}_P = 0 = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}$$

Tehát

$$\mathbf{v}_A = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP})$$

Így  $\mathbf{r}_{PA}$  merőleges  $\mathbf{v}_A$ -ra, nagysága pedig  $\frac{v_A}{\omega}$ . Az így megkapható  $P$  ponton átmenő, az alapsíkra merőleges egyenes minden pontjának sebessége 0, ezt a tengelyt **pillanatnyi forgástengelynek** nevezzük.



Ahogy bármilyen rotáció megadható egyetlen tengely körüli forgatással (lásd a tranformációkat feldolgozó blokkban), a **merev test szabad mozgása is leírható mint egyidejűleg egy bizonyos tengely körüli forgás és egy haladó mozgás.**

Azaz a test szabad mozgása tekinthető egy síkmozgás és ennek alapsíkjára merőleges irányú haladó mozgás eredőjének. A pillanatnyi forgástengelyre merőleges síkot tekintjük a síkmozgás alapsíkjának, a pillanatnyi forgástengely irányába történő elmozdulást pedig a hozzáadott translációknak.

Szabad mozgás esetén a **pillanatnyi forgástengely** meghatározása eltér a síkmozgásnál tárgyalattól, hiszen nincs mindig zérus sebességű pont. A pillanatnyi forgástengelyt azon pontok alkotják, melyek sebessége merőleges az alapsíkra, vagyis az alapsíkkal párhuzamos komponense 0.

Szabad mozgás során is igaz a síkmozgásnál megadott, test pontjainak sebességére adott összefüggés:

#### TETSZŐLEGES PONTOK SEBESSÉGÉNEK KAPCSOLATA

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

A fenti képlet alapján merev test bármely pontjának sebessége megadható a test szögsebessége és egy pontjának sebessége ismeretében. Tehát a test sebességállapota megadható egy pontjára felírt vektorkettőssel:

$$[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$$

Vizsgáljuk a  $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$  vektorkettőst:

- ①  $[0; \mathbf{v}_A]_A$ , tehát  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{v}_A \neq 0$ : elemi haladó mozgás. Bármely  $B$  pontot választva:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_A$$

- ②  $[\boldsymbol{\omega}; 0]_A$ : tehát  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ,  $\mathbf{v}_A = 0$ : elemi forgómozgás  $A$ -n átmenő pillanatnyi tengely körül. Bármely  $B$  pont sebessége:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

- ③  $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$ : tehát  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ ,  $\mathbf{v}_A \neq 0$  és  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_A$ : elemi forgómozgás de  $A$  nincs a pillanatnyi tengelyen. Ha  $P$  a pillanatnyi tengely egy pontja:

$$\mathbf{v}_P = 0 = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}$$

A merev test sebességállapotát leíró képlet deriválásával felírhatjuk a test pontjainak gyorsulása közötti összefüggést:

$$\mathbf{a}_B = \dot{\mathbf{v}}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{AB}$$

A szögsebesség idő szerinti deriváltja a szöggyorsulás ( $\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ ), és  $\dot{\mathbf{r}}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$ , így a pontok gyorsulására felírhatjuk a következő egyenletet:

#### MEREV TEST PONTJAINAK GYORSULÁSA

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

## MEREV TEST SZABADSÁGI FOKA

Merev test szabadsági fokának nevezzük az összes lehetséges pályájának leírásához szükséges skalárfüggvények számát.

Merev test szabadságfokainak száma szabad mozgás esetén 6, hiszen pozíciója 3 skalárfüggvénnyel adható meg (pl:  $[x, y, z]$ ), orientációját szintén 3 skalárfüggvény határozza meg (pl: Euler-szögek, vagy Roll, Pitch, Jaw).

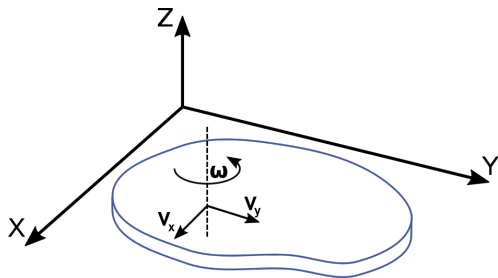
A szabadsági fokok számát minden skalár kényszeregyenlet eggyel csökkenti, ezt tárgyaljuk a továbbiakban.

Síkmozgás során (melyet a blokk elején részletesen tárgyaltunk), mint például egy asztalon szabadon elcsúszó test, a test pontjainak egyik koordinátája rögzített, így nem lehetséges az  $z$  tengely menti eltolás (az alábbi ábrán  $z$ ) és a másik két tengely körüli elforgatás (az ábrán  $x$  és  $y$ ). Ez alapján a síkmozgást végző test szabadságfokainak száma:  $6 - 3 = 3$ . Felírhatók a skalár kényszerek:

$$v_z = 0$$

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = 0$$





A több, kézerekkel összekapcsolt merev testből álló rendszereket mechanizmusnak nevezzük, a tagok kinematikai láncot alkotnak. Általában a tagok egyike rögzített, ezt állványnak nevezzük. Az kinematikai szempontból lényegtelen, melyik tagot jelöljük ki állványnak. Az  $n$  tagú, 1 állványú mechanizmus szabadságfokainak száma  $6(n - 1)$ , melyből levonandó az őket összekötő kinematikai párok kötöttségeinek száma.

A csuklós mechanizmus speciális esete a síkmozgásnak, melyre jó példa a fizikai inga. Ebben az esetben a test csukló tengelyére eső pontjainak pozíciója fix, így nem lehetséges a másik két tengely körüli forgatás. A mozgásra felírható kényszerek:

$$v_{P,x} = 0$$

$$v_{P,y} = 0$$

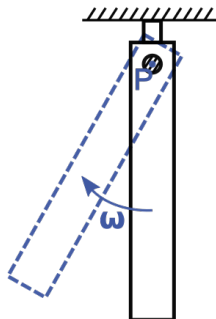
$$v_{P,z} = 0$$

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = 0$$

Ekkor a test szabadságfoka:

$6 - 5 = 1$ , vagyis az egyetlen lehetséges mozgás a csukló tengelye körüli forgatás.



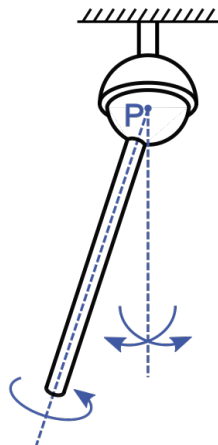
Gömbi mozgás,  
mely például két gömbcsuklóval összekötött  
taggal valósítható meg, a test egy pontjának  
pozíciója rögzített, ekkor megengedett  
mind a 3 tengely körüli elforgatás. A  
gömbi mozgásra felírható skalár kényszerek:

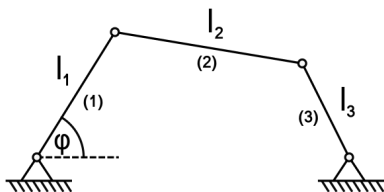
$$v_{P,x} = 0$$

$$v_{P,y} = 0$$

$$v_{P,z} = 0$$

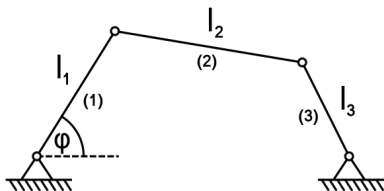
Gömbi mozgás szabadságfoka így:  $6 - 3 = 3$





Az ábrán látható, síkmozgást végző négycsuklós mechanizmus tipikus példa összetettebb mechanizmusokra. A mechanizmus szabadsági fokát határozzuk meg több lépésben, csuklóról csuklóra:

- 1 Az (1) tagot az állványhoz egyszerű csuklót köti, így ahogy már beláttuk, szabadsági fokainak száma 1.



- 1 A (2) szintén csuklóval csatlakozik az (1) taghoz, és (3) tag a (2) taghoz szintén, mely plusz 1-1 szabadsági fokot jelent, így a (3) tagig felírt kinematikai lánc szabadsági foka 3.
- 2 A (3) tagot csukló köti a másik állványhoz, mely rögzít 2 térkoordinátát (a csukló által fixált további 3 paramétert már az előző tagok meghatározzák), így a teljes rendszer szabadsági foka:  $3 - 2 = 1$ .

Vagyis a  $\phi$  szög beállítása egyértelműen meghatározza az egész mechanizmus térbeli helyzetét.



Köszönöm a figyelmet!

---

# ROBOTTECHNIKA ALAPJAI (NBXRT1IBNE)

## V. KINETIKA GYORSTALPALÓ

---

Összeállította: Kuti József

Szerkesztette: Dr. Galambos Péter

2020. november 25.  
Budapest

**ÓBUDAI EGYETEM**  
**BEJCY ANTAL INTELLIGENS**  
**ROBOTTECHNIKAI KÖZPONT**



Dinamika:

- A mozgások okai: erők, nyomatékok
- A rendszer mozgásegyenletei: differenciálegyenletek
- Megoldásai adott kezdeti feltételekből: lehetséges pályák



Dinamika:

- A mozgások okai: erők, nyomatékok
- A rendszer mozgásegyenletei: differenciálegyenletek
- Megoldásai adott kezdeti feltételekből: lehetséges pályák

Robotok dinamikai modellezése:

- Mi a kapcsolat a csuklógyorsulások és a csuklónyomatékok, terhelések között?
- Cél: A megfelelő csuklónyomatékokat ne csak PID szabályozásból, hanem viszonylag pontos modell alapján számítsuk ki (feedforward).

Az eddigiekben a kinematika a mozgások, kényszerek leírásával foglalkozott. Ebben a diáorban a mozgások okaival foglalkozunk, meghatározva az anyagi pontok, merev testek mozgásegyenleteit. Ezek megoldásai adják a lehetséges mozgás pályáját.

- ① Anyagi pont dinamikája, Newtoni axiómák
- ② Anyagi pontrendszerek tulajdonságai
- ③ Merev testek dinamikája, tehetetlenségi nyomaték és számítása
- ④ Rendszerek, kényszerek osztályozása
- ⑤ Másodfajú Lagrange-mozgásegyenlet

# Elméleti háttér

Anyagi pontok / testek mozgásállapotának (sebességének) megváltoztatásához egy másik anyagi pont / test ráhatása szükséges.

Ezt a hatást **erő**nek nevezzük. Mértékegysége Newton [N].

### NEWTON I. AXIÓMÁJA

Egy anyagi pont nyugalomban van, vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, ha nem hat rá erő.

Azon vonatkoztatási rendszereket, amelyekben az első axióma teljesül **inerciarendszer**nek nevezzük.

(Rendszerint viszonyítás kérdése. Például: a Föld jó vonatkoztatási rendszer a mindennapi folyamatok leírásához, a bolygók mozgásának leírásához már nem.)

#### TÉTEL: GALILEI

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszer inerciarendszer.

Azon vonatkoztatási rendszereket, amelyekben az első axióma teljesül **inerciarendszer**nek nevezzük.

(Rendszerint viszonyítás kérdése. Például: a Föld jó vonatkoztatási rendszer a mindennapi folyamatok leírásához, a bolygók mozgásának leírásához már nem.)

### TÉTEL: GALILEI

Ha egy vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, akkor minden hozzá képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző rendszer inerciarendszer.

A továbbiakban rendszerint az egyes pozíciókat, sebességeket, gyorsulásokat egy külső inerciarendszerben írunk le, amit világkoordinátarendszernek nevezünk.

(A testhez rögzített, azzal együtt mozgó koordinátarendszer általában nem inerciarendszer.)

## DEF. IMPULZUS

Az anyagi pont lendülete (máshol: impulzusa, mozgásmennyisége, lineáris momentuma) alatt az alábbi mennyiséget értjük:  $\mathbf{I} = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ .

Ennek deriváltja  $\dot{\mathbf{I}} = \dot{m}\dot{\mathbf{r}}(t) + m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ , ami (feltételezve, hogy az anyagi pont tömege állandó)  $\dot{\mathbf{I}} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$  azaz a tömeg és a gyorsulás szorzata.

## DEF. IMPULZUS

Az anyagi pont lendülete (máshol: impulzusa, mozgásmennyisége, lineáris momentuma) alatt az alábbi mennyiséget értjük:  $\mathbf{I} = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ .

Ennek deriváltja  $\dot{\mathbf{I}} = \dot{m}\dot{\mathbf{r}}(t) + m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ , ami (feltételezve, hogy az anyagi pont tömege állandó)  $\dot{\mathbf{I}} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$  azaz a tömeg és a gyorsulás szorzata.

## NEWTON II. AXIÓMÁJA

Az anyagi pont impulzusának deriváltja egyenlő a rá ható erők eredőjével  $\dot{\mathbf{I}}(t) = \sum \mathbf{F}_i(t)$ , azaz  $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t)$ .



## DEF. IMPULZUS

Az anyagi pont lendülete (máshol: impulzusa, mozgásmennyisége, lineáris momentuma) alatt az alábbi mennyiséget értjük:  $\mathbf{I} = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ .

Ennek deriváltja  $\dot{\mathbf{I}} = m\dot{\mathbf{v}}(t) + m\ddot{\mathbf{r}}(t)$ , ami (feltételezve, hogy az anyagi pont tömege állandó)  $\dot{\mathbf{I}} = m\ddot{\mathbf{r}}(t)$  azaz a tömeg és a gyorsulás szorzata.

## NEWTON II. AXIÓMÁJA

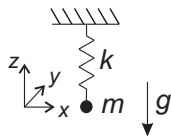
Az anyagi pont impulzusának deriváltja egyenlő a rá ható erők eredőjével  $\dot{\mathbf{I}}(t) = \sum \mathbf{F}_i(t)$ , azaz  $m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t)$ .

## NEWTON III. AXIÓMÁJA

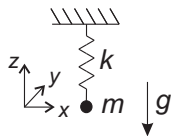
Két anyagi pont kölcsönhatását leíró erők közös hatásvonalúak és ellentétes irányúak.

Axiómák: megfigyelésekből származó alapfeltevések, amelyek jól lefedik a hétköznapi tapasztalatokat. A Newtoni dinamika törvényei ezen axiómákból következnek.

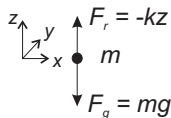
Tekintsük az ábrán látható,  $g$  gravitációs gyorsulás mellett,  $k$  merevségű rugóra felfüggesztett,  $m$  tömegű anyagi pontot.



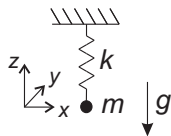
Tekintsük az ábrán látható,  $g$  gravitációs gyorsulás mellett,  $k$  merevségű rugóra felfüggesztett,  $m$  tömegű anyagi pontot.



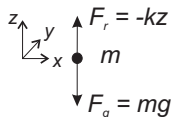
Rajzoljuk fel a *szabadtest ábráját*: csak a pontot, a rá ható erőket és a leíráshoz használt koordinátarendszert jelenítsük meg.



Tekintsük az ábrán látható,  $g$  gravitációs gyorsulás mellett,  $k$  merevségű rugóra felfüggesztett,  $m$  tömegű anyagi pontot.



Rajzoljuk fel a *szabadtest ábráját*: csak a pontot, a rá ható erőket és a leíráshoz használt koordinátarendszert jelenítsük meg.

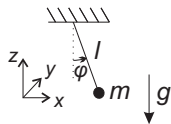


$$\text{Ekkor Newton II. alapján: } m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -kz - mg \end{bmatrix}$$

Tehát:  $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$  és  $m\ddot{z} = -kz - mg$  adja meg a pont gyorsulását. Nyugalomban van, ha sebességei zérusak és  $-kz - mg = 0$ , azaz  $z = -mg/k$ .

A kényszerek megkötéseket adnak az egyes koordinátákra, sebességekre, gyorsulásokra és ezek biztosítására ismeretlen nagyságú kényszererők jelennek meg a rendszerben. A mozgásegyenletekben így egyaránt vannak ismeretlenek a gyorsulások és az erők között.

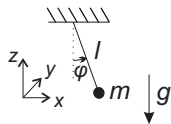
Tekintsük az ábrán látható ingát  $\varphi$  kitérített helyzetben.



A kényszerek megkötéseket adnak az egyes koordinátákra, sebességekre, gyorsulásokra és ezek biztosítására ismeretlen nagyságú kényszererők jelennek meg a rendszerben. A mozgásegyenletekben így egyaránt vannak ismeretlenek a gyorsulások és az erők között.

Tekintsük az ábrán látható ingát  $\varphi$  kitérített helyzetben.

Rajzoljuk meg a szabadtest ábrát és használjuk a kísérő triéder koordinátarendszerrel azonos helyzetű álló koordinátarendszert. Jelöljük az egyes vektorok tangenciális, normális és binormális komponenseit  $t, n, b$  alsó indexek.



A kényszerek megkötéseket adnak az egyes koordinátákra, sebességekre, gyorsulásokra és ezek biztosítására ismeretlen nagyságú kényszererők jelennek meg a rendszerben. A mozgásegyenletekben így egyaránt vannak ismeretlenek a gyorsulások és az erők között.

Tekintsük az ábrán látható ingát  $\varphi$  kitérített helyzetben.

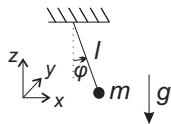
Rajzoljuk meg a szabadtest ábrát és használjuk a kísérő triéder koordinátarendszerrel azonos helyzetű álló koordinátarendszert. Jelöljük az egyes vektorok tangenciális, normális és binormális komponenseit  $t, n, b$  alsó indexek.

Mivel a kényszer körmozgás, a normális irányú gyorsulás:  $\ddot{r}_n = \dot{r}^2/l$ .

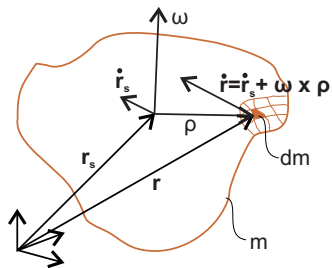
$$\text{Newton II. alapján: } m \begin{bmatrix} \ddot{r}_t \\ \ddot{r}_n \\ \ddot{r}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \varphi \\ T - mg \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Így  $\ddot{r}_b = 0$ ,  $\ddot{r}_t = -g \sin \varphi$  és  $T = mg \cos \varphi + m\dot{r}^2/l$ .

Ezekből a világkoordinátarendszerbeli értékek is számíthatóak.



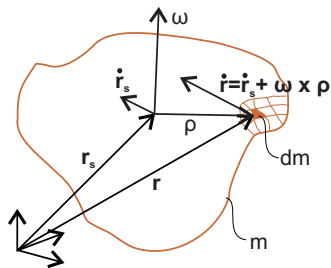
A merev test tekinthető mereven összerögzített, végtelenül kicsiny ( $dm$  tömegű) anyagi pontokból álló rendszernek.





A merev test tekinthető mereven összerögzített, végtelenül kicsiny ( $dm$  tömegű) anyagi pontokból álló rendszernek.

Az anyagi pontrendszerénél használt összegzések itt folytonos integrálokkal írhatóak le. Például  $\int_m \mathbf{r} dm$  jelentése: az egyes  $dm$  tömegű anyagi pontok helyzetének a tömegükkel súlyozott összege.

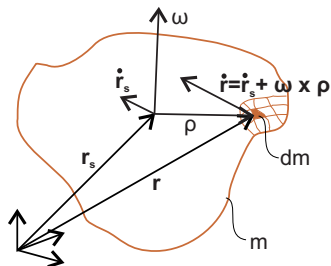


A merev test tekinthető mereven összerögzített, végtelenül kicsiny ( $dm$  tömegű) anyagi pontokból álló rendszernek.

Az anyagi pontrendszerénél használt összegzések itt folytonos integrálokkal írhatóak le. Például  $\int_m \mathbf{r} dm$  jelentése: az egyes  $dm$  tömegű anyagi pontok helyzetének a tömegükkel súlyozott összege.

Forgását a szögsebesség vektor írja le, amivel az egyes pontjainak sebessége:

$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$  és azok gyorsulására:  $\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA})$ , ahol  $\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  a szöggyorsulás.

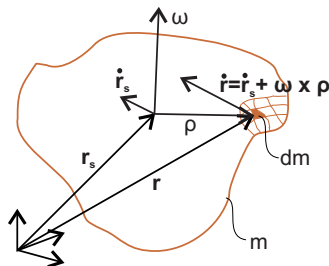


A merev test tekinthető mereven összerögzített, végtelenül kicsiny ( $dm$  tömegű) anyagi pontokból álló rendszernek.

Az anyagi pontrendszerénél használt összegzések itt folytonos integrálokkal írhatóak le. Például  $\int_m \mathbf{r} dm$  jelentése: az egyes  $dm$  tömegű anyagi pontok helyzetének a tömegükkel súlyozott összege.

Forgását a szögsebesség vektor írja le, amivel az egyes pontjainak sebessége:

$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA}$  és azok gyorsulására:  $\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{BA})$ , ahol  $\boldsymbol{\epsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  a szöggyorsulás.



## A MEREV TEST ...

- Teljes tömege:  $m = \int_m dm$
- Súlypontja:  $\mathbf{r}_S(t) = \int_m \mathbf{r} dm / m$
- Súlypontjának sebessége:  $\dot{\mathbf{r}}_S(t) = \int_m \dot{\mathbf{r}} dm / m$
- Súlypontjának gyorsulása:  $\ddot{\mathbf{r}}_S(t) = \int_m \ddot{\mathbf{r}} dm / m$

## IMPULZUS

A test impulzusa:  $\mathbf{I}(t) = \int_m \dot{\mathbf{r}}(t) dm = m\dot{\mathbf{r}}_S(t)$

Az impulzus derivált:  $\dot{\mathbf{I}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}_S(t)$

Tekintsünk egy merev testet, amire  $\mathbf{F}_i$  erők hatnak  $i = 1, \dots, l$

Jelölje tömegét  $m$ , ezzel a súlypontjának gyorsulása:

$$\underbrace{m\ddot{\mathbf{r}}_S}_{\frac{d}{dt} \mathbf{I}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i}_{\mathbf{F}_e}$$

## PERDÜLET A SÚLYPONTRA

Perdület a súlypontra:

$$\begin{aligned}\pi_S &= \int_m \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)}_{\boldsymbol{\rho}} \times \dot{\mathbf{r}} dm = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\dot{\mathbf{r}}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \\ &= \underbrace{\int_m \boldsymbol{\rho} dm}_{=0} \times \dot{\mathbf{r}}_S + \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \dots = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}(t)\end{aligned}$$

## PERDÜLET A SÚLYPONTRA

Perdület a súlypontra:

$$\begin{aligned}\pi_S &= \int_m \underbrace{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)}_{\boldsymbol{\rho}} \times \dot{\mathbf{r}} dm = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\dot{\mathbf{r}}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \\ &= \underbrace{\int_m \boldsymbol{\rho} dm}_{=0} \times \dot{\mathbf{r}}_S + \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) dm = \dots = \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}(t)\end{aligned}$$

ahol  $\boldsymbol{\Theta}_S(t) = \begin{bmatrix} \Theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & \Theta_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & \Theta_z \end{bmatrix}$  a súlypontra számított

tehetetlenségi nyomatéki mátrix a világ koordináta rendszerben:

$$\Theta_x = \int_m (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm$$

$$D_{xy} = \int_m \rho_x \rho_y dm$$

a további értékek hasonlóan.

A tehetetlenségi nyomaték értékei – a szögsebességhez, szöggyorsuláshoz hasonlóan – függenek a koordinátarendszertől. A testhez képest mozgó koordinátarendszerben az értékeik is változnak, ezért azt mindig a test súlypontjához rögzített, célszerűen választott orientációjú koordinátarendszerben adják meg.

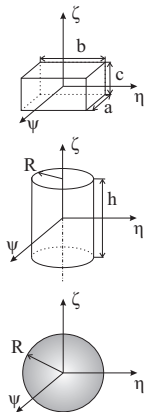
Például egyszerű testek tehetetlenségi nyomatékai a tömegközéppontjukra, a hozzájuk rögzített  $(\psi, \eta, \zeta)$  koordináta rendszerben:

$$\text{Téglatest: } \Theta_{\psi} = m \frac{b^2+c^2}{12}, \quad \Theta_{\eta} = m \frac{a^2+c^2}{12}, \quad \Theta_{\zeta} = m \frac{a^2+b^2}{12}$$

$$\text{Henger: } \Theta_{\psi} = \Theta_{\eta} = m \frac{3R^2+h^2}{12}, \quad \Theta_{\zeta} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\text{Gömb: } \Theta_{\psi} = \Theta_{\eta} = \Theta_{\zeta} = \frac{2mR^2}{3}$$

A deviációs nyomatékok zérusak:  $D_{ij} = 0$ .



## DEF. TEHETETLENSÉGI FŐIRÁNYOK

Azt a  $(\psi, \eta, \zeta)$  koordinátarendszert, amelyben a tehetetlenségi nyomatékok mátrixa  $\Theta_{S0}$  diagonálmátrix (azaz a deviációs nyomatékok zérusak) főtengely rendszernek, tengelyeit tehetetlenségi főirányoknak nevezzük.

Adott  $\Theta_S$  tehetetlenségi nyomatéki mátrix esetén:

- sajátvektorai a tehetetlenségi főtengelyek,
- a belőlük képzett  $\mathbf{R}$  mátrix az a koordinátarendszer-forgatás, amely a főtengely rendszerbe visz,
- sajátértékei a fő tehetetlenségi nyomatékok.

azaz  $\Theta_S = \mathbf{R}\Theta_{S0}\mathbf{R}^{-1}$ , ha egy pont koordinátáit  $(\psi, \eta, \zeta)$ -ban  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $(x, y, z)$ -ben  $\mathbf{r}$  jelöli:  $\mathbf{r} = \mathbf{R}\boldsymbol{\rho}$ .

Adott  $\Theta_{S0}$  tehetetlenségi nyomatéki mátrix esetén, egy vektorral való szorzáshoz

- a vektort írjuk le a főtengely rendszerben,
- végezzük el a mátrix-vektor szorzást,
- az eredményt transzformáljuk vissza,

azaz  $\Theta\mathbf{v} = \mathbf{R}(\Theta_0(\mathbf{R}^T\mathbf{v}))$



## STEINER-TÉTEL

Tekintsünk egy merev testet, amely több részből áll. Ezek súlypontjait jelölje  $\mathbf{r}_i$ , tömegeit  $m_i$ , tehetetlenségeiket a súlypontjukra (világkoordináta rendszerben)  $\Theta_i$ .

Ekkor a test tömege:  $m = \sum_i m_i$ ,

súlypontja:  $\mathbf{r}_S = \sum_i \mathbf{r}_i m_i / m$ ,

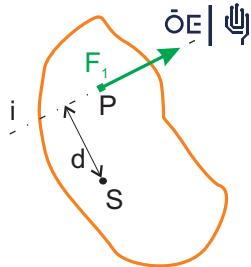
és ezekkel a test súlyponti tehetetlenségi nyomatéka számítható mint:

$$\Theta_S = \sum_i (\Theta_i + (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i)^T m).$$

Merev testre ható erők:

- támadáspont „ $P$ ”
- hatásvonal „ $i$ ”

A forgató hatása függ  
a hatásvonal és súlypont távolságától (**erőkar**).



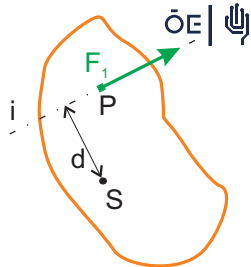
Merev testre ható erők:

- támadáspont „ $P$ ”
- hatásvonal „ $i$ ”

A forgató hatása függ  
a hatásvonal és súlypont távolságától (**erőkar**).

Tekintsünk egy merev  
testet, amire  $\mathbf{F}_i$  erők hatnak  $r_i$  támadásponttal

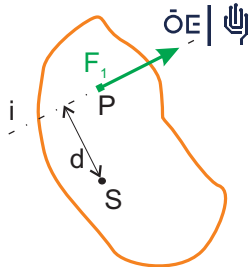
Jelölje tömegét  $m$ , súlypontjára számított  
tehetetlenségi nyomaték mátrixát  $\Theta_S$ , szögsebességét  $\omega$ ,  
szöggyorsulását  $\epsilon$ .



Merev testre ható erők:

- támadáspont „ $P$ ”
- hatásvonal „ $i$ ”

A forgató hatása függ  
a hatásvonal és súlypont távolságától (erőkar).



Tekintsünk egy merev  
testet, amire  $\mathbf{F}_i$  erők hatnak  $\mathbf{r}_i$  támadásponttal

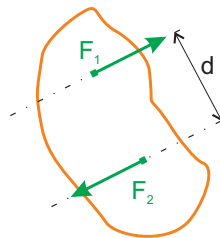
Jelölje tömegét  $m$ , súlypontjára számított  
tehetetlenségi nyomaték mátrixát  $\Theta_S$ , szögsebességét  $\omega$ ,  
szöggyorsulását  $\epsilon$ .

Ekkor a testre ható erők, nyomatékok és a test gyorsulása közötti  
kapcsolat:

$$\underbrace{\Theta_S \epsilon + \omega \times \Theta_S \omega}_{\frac{d}{dt} \pi_S} = \underbrace{\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_i}_{\mathbf{M}_S}$$

Erőpár: két erő ( $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ) amely

- azonos nagyságú,
- ellentétes irányú,
- más hatásvonalú

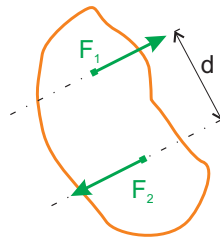


Erőpár: két erő ( $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ) amely

- azonos nagyságú,
- ellentétes irányú,
- más hatásvonalú

Nem mozdítja el a súlypontot:  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

Csak forgat:  $\dot{\pi}_S = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_2 =$   
 $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1$



Erőpár: két erő ( $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ ) amely

- azonos nagyságú,
- ellentétes irányú,
- más hatásvonalú

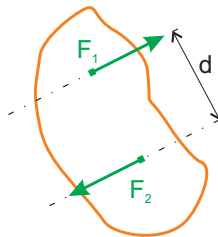
Nem mozdítja el a súlypontot:  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

Csak forgat:  $\dot{\pi}_S = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_2 =$   
 $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_1 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1$

- **nagysága : csak a hatásvonalak távolságától és az erők nagyságától függ ( $F \cdot d$ )**
- **iránya: merőleges a hatásvonalak síkjára**

A hatását: nyomatéknek, mértékegysége: [Nm].

Pl. rotációs csuklóban a mozgató nyomaték



## DINAMIKA ALAPTÉTELE MEREV TESTRE

Tekintsünk egy merev testet, amire  $\mathbf{F}_i$  erők hatnak  $\mathbf{r}_i$  támadásponttal és  $\mathbf{M}_k$  nyomatékok.

Jelölje tömegét  $m$ , súlypontjára számított tehetetlenségi nyomaték mátrixát  $\Theta_S$ , szögsebességét  $\boldsymbol{\omega}$ , szöggyorsulását  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Ekkor testre ható erők, nyomatékok és a test gyorsulása közötti kapcsolat:

$$\underbrace{m \ddot{\mathbf{r}}_S}_{\frac{d}{dt} \mathbf{l}} = \underbrace{\sum_i \mathbf{F}_i}_{\mathbf{F}_e},$$

$$\underbrace{\Theta_S \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \Theta_S \boldsymbol{\omega}}_{\frac{d}{dt} \boldsymbol{\pi}_S} = \underbrace{\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{M}_k}_{\mathbf{M}_S}.$$



## DEF. MOZGÁSI ENERGIA

Egy  $m$  tömegű,  $\mathbf{v}$  sebességű anyagi pont mozgási energiája:  $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ .

Egy  $m$  tömegű,  $\Theta_S$  tehetetlenségi nyomatékú merev test mozgási energiája:

$$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{\mathbf{r}}^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\dot{\mathbf{r}}_S + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 dm = \dots = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Theta_S \boldsymbol{\omega}$$

## DEF. F ERŐ TELJESÍTMÉNYE

Egy  $\mathbf{v}$  sebességű anyagi pontra ható  $\mathbf{F}$  erő teljesítménye a  $\mathbf{v}$  sebesség és az  $\mathbf{F}$  erő skaláris szorzata:  $P = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v}$ .

Merev test esetén az erő és támadáspontja sebességének skaláris szorzata.

## TELJESÍTMÉNYTÉTEL

A mozgási energia deriváltja azonos a testre ható erők eredőjének teljesítményével:  $\dot{T} = P_e$ .

Könnyen belátható:  $\dot{T} = m\dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} = \mathbf{F}_e^T \mathbf{v}$ .

## DEF. MECHANIKAI MUNKA

Az  $\mathbf{F}$  erő munkája a  $t_0$  és  $t_1$  időpontok között a teljesítményének integrálja:

$$W_{01} = \int_{t=t_0}^{t_1} P dt.$$

## POTENCIÁLIS ERŐ, POTENCIÁLIS ENERGIA

Azon  $F$  erőket, melyek munkája csak a kezdeti és végső pozíciótól függ (és független a bejárt úttól) potenciálisnak nevezünk, mert létezik  $U$  potenciál függvény, amelynek gradienseként megadható a függvény:  $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ .

Ekkor a két pont között mozgatva az anyagi pontot az erő munkája a pontok közötti potenciálkülönbség:  $W_{01} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_0)$ .

Potenciális erők:

- gravitációs tér  $F_g = -mge_z \rightarrow U = mgz$  (Ell.:  $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = [0 \ 0 \ -mg]$ .)
- lineáris rugó  $F_k = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \rightarrow U = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})^2/2$  (Ell.:  $-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = k(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r})$ .)
- elektrosztatikus tér, etc.

Nem-potenciális erők:

- csillapítás
- csúszó súrlódás
- etc.

## IDEÁLIS KÉNYSZEREK

A kényszererők teljesítménye zérus, típusai:

- Stacioner geometriai kényszer: megadható mint  $f(\mathbf{r}) = 0$  (csap, csukló, köté)l)
- Instacioner geometriai kényszer: függ az időtől is  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  (változó hosszúságú köté)l)
- Stacioner kinematikai kényszer: megadható mint  $f(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = 0$  (tapadási súrlódás)
- Instacioner kinematikai kényszer: függ az időtől is  $f(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = 0$

## TÉTEL: MECHANIKAI ENERGIAMEGMRADÁS

Ha egy mechanikai rendszerre csak potenciális erők és ideális kényszerek hatnak, a mechanikai összenergia  $\mathcal{E} = U + T$  állandó.

Nemideális kényszerek: pl. csúszási súrlódás.

## RENDSZEREK

- **Holonom**, ha csak geometriai kényszerek, egyébként **anholonom**.
- **Szkleronom**, ha csak stacioner kényszerek, egyébként **reonom**.

A továbbiakban csak **holonom**, **szkleronom** rendszerekkel foglalkozunk.

Összetett, több merev kényszerrel összerögzített rendszerek (pl. robotkar) esetén a Newton módszer alkalmazása során a kényszererők száma nagy mértékben megnehezítheti a mozgásegyenletek levezetését, azonban az energia alapú megközelítések mint a másodfajú Lagrange mozgásegyenlet közvetlenül szolgáltatják a diff. egyenletrendszert.

### ÁLTALÁNOS KOORDINÁTÁK

Tekintsünk egy mechanikai rendszert, és válasszunk  $N$  skalár koordinátát  $(q_1, \dots, q_N)$ , amellyel leírható minden anyagi pont aktuális helyzete:

$$\mathbf{r}_1 = f_1(q_1, \dots, q_N),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{r}_M = f_M(q_1, \dots, q_N),$$

és ezeket használva nincs szükség kényszerekre tetszőleges  $q_n$  értékek esetén kielégítik a kényszereket. (Lehetnek Descartes koordináták, szögek, stb.)

Többféleképpen felvehető, megfelelő választással egyszerűsíthető a levezetés a későbbiekben - csak hosszú gyakorlat után.

Ekkor ezekkel megadható a rendszer potenciális energiája  $U = U(q_1, \dots, q_N)$ .

Az anyagi pontok sebessége megadható, mint

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \sum_{n=1}^N \left. \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{q}_n} \right|_{\mathbf{q}} \dot{q}_n \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{r}}_M &= \sum_{n=1}^N \left. \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{q}_n} \right|_{\mathbf{q}} \dot{q}_n, \end{aligned}$$

így a rendszer mozgási energiája is kifejezhető az általános koordinátákkal és deriváltjukkal  $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, q_1, \dots, q_N)$ .

Valamint azon erők teljesítménye, amelyek nem kényszererők vagy potenciális erők is felírhatóak az általános koordinátákkal:

$$P^* = \sum_{k=1}^K \mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{r}}_k = P^*(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, q_1, \dots, q_N),$$

## PÉLDA: INVERZ INGÁ

Tekintsük a képen látható kocsit a hozzá rögzített az ingával.

Csak síkmozgásokat

figyelembe véve a testeknek 3-3 szabadságfoka lenne ( $x$ ,  $y$  irányú mozgás,  $z$  körüli elfordulás).

A kiskocsi nem mozoghat  $y$  irányba és nem fordulhat el az aljzat és a gravitációval való kölcsönhatása miatt. A rudat tartó csap további 2 szabadságfokot vesz el: az  $x, y$  irányú elmozdulásokat kényszeríti össze. Így összesen 4 kényszer hat a rendszerre, így az csak 2 szabadságfokú.

Válasszunk 2 általános koordinátát:

- $x$  a kiskocsi súlypontjának helyét és
- $\varphi$  a rúd vízszintessel bezárt szögét.

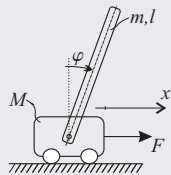
Ezekkel minden megengedett pozíció leírható. Például a testek súlypontjai:

$$\mathbf{r}_1 = [x \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{r}_2 = [x + l/2 \sin \varphi \quad l/2 \cos \varphi \quad 0]^T,$$

A súlypontok sebessége:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = [\dot{x} \quad 0 \quad 0]^T, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = [\dot{x} + \dot{\varphi} l/2 \cos \varphi \quad -\dot{\varphi} l/2 \sin \varphi \quad 0]^T.$$

és a rúd szögsebessége:  $\boldsymbol{\omega} = [0 \quad 0 \quad -\dot{\varphi}]^T$



## PÉLDA: INVERZ INGA (FOLYTATÁS)

A kocsi mozgási energiája:  $T_1 = M\dot{x}^2/2$ .

A rúd mozgási energiája:  $T_2 = m((\dot{x}^2 + \frac{\dot{\varphi}^2 l^2}{2} \cos^2 \varphi) + (\frac{\dot{\varphi}^2 l^2}{2} \sin^2 \varphi))/2 + \Theta_z \dot{\varphi}^2/2$

Elhanyagolva a rúd sugarát  $\Theta_z = ml^2/12$ , így

$$T_2 = m(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2/3 + \dot{x}\dot{\varphi} l \cos \varphi)/2$$

Ezzel a mozgási energia:  $T = T_1 + T_2 = \dot{x}^2 \frac{m+M}{2} + \dot{\varphi}^2 \frac{ml^2}{6} + \dot{x}\dot{\varphi} \frac{ml \cos \varphi}{2}$

Potenciális energia (a rúd súlypontjának helyzetéből):  $U = mg \frac{l}{2} \cos \varphi$ .

Az  $F$  erő teljesítménye:  $P^* = \dot{x}F$

## MÁSODFAJÚ-LAGRANGE MOZGÁSEGYENLET

Holonom mechanikai rendszerek (csak geometriai kényszerek) esetén, megfelelően választott  $(q_1, \dots, q_N)$  általános koordinátákkal leírt rendszer  $N$  mozgásegyenlete megadható mint

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n^* - \frac{\partial U}{\partial q_n} \quad (n = 1..N)$$

ahol  $T$  a rendszer mozgási energiája és  $U$  a potenciális energiája és  $Q_n^* = \frac{\partial P^*}{\partial \dot{q}_n}$  az egyéb erők teljesítményéből származtatott általános erő.

## PÉLDA: IVERZ INGA (FOLYTATÁS)

### Mozgásegyenlet az $x$ általános koordinátához

Végezzük el a szükséges deriválásokat:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(m + M) + \dot{\varphi} \frac{ml \cos \varphi}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}(m + M) + \ddot{\varphi} \frac{ml \cos \varphi}{2} - \dot{\varphi}^2 \frac{ml \sin \varphi}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P^*}{\partial x} = F$$

Behelyettesítve:  $\ddot{x}(m + M) + \ddot{\varphi} \frac{ml \cos \varphi}{2} - \dot{\varphi}^2 \frac{ml \sin \varphi}{2} = F$

### Mozgásegyenlet az $\varphi$ általános koordinátához

Végezzük el a szükséges deriválásokat:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \frac{ml^2}{3} + \dot{x} \frac{ml \cos \varphi}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \ddot{\varphi} \frac{ml^2}{3} + \ddot{x} \frac{ml \cos \varphi}{2} - \dot{x} \dot{\varphi} \frac{ml \sin \varphi}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\dot{x} \dot{\varphi} \frac{ml \sin \varphi}{2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mg \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} = 0$$

Behelyettesítve:  $\ddot{\varphi} \frac{ml^2}{3} + \ddot{x} \frac{ml \cos \varphi}{2} = mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$

Vektoros alakban: 
$$\begin{bmatrix} m + M & \frac{ml \cos \varphi}{2} \\ \frac{ml \cos \varphi}{2} & \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}^2 \frac{ml \sin \varphi}{2} \\ -mg \frac{l}{2} \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Röviden:  $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}$



## IMPLEMENTÁCIÓ PÉLDA

Írjunk MATLAB függvényt, ami az aktuális  $(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}, F)$  értékek és  $(m, M, l)$  alapján meghatározza a  $\ddot{\varphi}, \ddot{x}$  gyorsulásokat:

```
function [ddx,ddphi] = InvPend(phi,dphi,x,dx,F)
    g = 9.81; M = 1; m = 0.1; l = 0.4;
    M_ = [m+M, m*l*cos(phi)/2;...
          m*l*cos(phi)/2, m*l*l/3];
    f = [F + dphi*dphi*m*l*sin(phi)/2;...
          m*g*l/2*sin(phi)];
    acc = M_ \ f;
    ddx = acc(1);
    ddphi = acc(2);
end
```

Számítsuk ki, hogy egyensúlyi állapotban konstans erő hat a rendszerre:

```
phi=0; dphi=0; x=10; dx=1; F=10;
[ddx,ddphi] = InvPend(phi,dphi,x,dx,F)
```

Az eredmény  $\ddot{x} = 9.7561[m/s^2]$ ,  $\ddot{\varphi} = -36.5854[rad/s^2]$ , ami megfelel a hétköznapi tapasztalatoknak: a kiskocsi előre indul, az inga hátra lendül.

A kapott mozgásegyenletek mindig átírhatóak vektoros alakba:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u}, \text{ ahol}$$

- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  a tehetlenségi mátrix (szimmetrikus, sajátértékei pozitívak),
- $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a rendszer dinamikáját írja le,
- $\mathbf{u}$  külső hatások (bemenetek, zavarások) vektora,
- $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  a külső hatások együtthatói,

A gyorsulások számíthatóak, mint  $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})\mathbf{u})$

## MEGJEGYZÉS

Bár az eljárás számításigényesnek tűnhet, a levezetés jóval egyszerűbb a Newton-módszer alkalmazásánál: az általános koordináták bevezetésétől, az energiák és az általános teljesítmény felírásától már automatikusan származtathatóak a mozgásegyenletek.

A deriválások, behelyettesítések a legtöbb szimbolikus matematikai programcsomagban (pl.: Wolfram Mathematica) elvégezhetőek.

▶ TOVÁBBI INFORMÁCIÓ

## IPARI ROBOTKAR

Robotkar esetén a csuklókoordináták rendszerint jó általános koordináták.

- 1 A Denavit-Hartenberg alakból könnyen megadható paraméteresen az egyes szegmensek közötti transzformáció, valamint az egyes szegmensek súlypontjának helyzete és az endeffektor helyzete.
- 2 A szegmensek szögsebességei a csuklósebességekből, a szegmensek súlypontjainak sebessége deriválással megadható.
- 3 Ezekkel a szegmensek potenciális és mozgási energiája megadható.
- 4 Továbbá a csuklóokban a motor nyomatékai és az endeffektorra ható erők, nyomatékok általános teljesítménye is megadható.

Ezekből a másodfajú Lagrange-mozgásegyenlet közvetlenül szolgáltatja a csuklókoordináták gyorsulásait.

## MEGJEGYZÉS

Ezzel szemben felírva a Newtoni mozgásegyenleteket, 6-szor annyi egyenletet kapunk, amelyek  $\frac{5}{6}$ -a csak a kényszererők és nyomatékok kifejezésével és behelyettesítésével tűnik el.



## SIMONYI KÁROLY: A FIZIKA KULTÚRTÖRTÉNETE

Simonyi Károly, A fizika kultúrtörténete: a kezdetektől a huszadik század végéig. Budapest: Akadémiai Kiadó., 2011.



Köszönöm a figyelmet!

A Robottechnika  
Alapjai

Robotstruktúrák  
és  
Robotválasztás

2020.09.16-23.

# Kinematikai lánc

Mozgáskelii kényszerkapcsolatban álló merev testekből felépített mozgó szerkezet = Mechanizmus

Az összekapcsolt tagok láncot alkotnak. = kinematikai lánc

Nyílt vs. Zárt  
Soros vs. párhuzamos

A robotfarot ättaliden  
Soros, nyilt fin. läncot

De  
vannat pärharomas  
Robotot is pl.

Stuart plattform  
Delta robot



Soros:

- Minden tagnak pontosan egy öse van.

Mjlt:

- Nincsen benne hurok
- Minden csatlótetszőlegesen helyzetbe állítható

A robotot elemi csuklókból  
építkeznek

- ÜN. 5. osztályú kénszer

- Rotációs

- Transzlációs

Csukló = joint

New wrist!

Rotációs csukló =

Revolute joint

Rotational joint

Transzlációs csukló =

Translational joint, Linear joint

Prismatic joint

kar tagok, vagy kar elemek

Link (ez magyarul is jó)

Bazis → Base

Az a Link, ami rögzítve van a környezethez

Szerszám → Tool

Munkavégző berendezés

- csavarhúzó
- megfogó
- hegyenti pita

(Ez nem jön a robottal)

Végperem : Flange

Szabványos kialakítású  
illesztő felület, amire a  
Tool felszerelhető

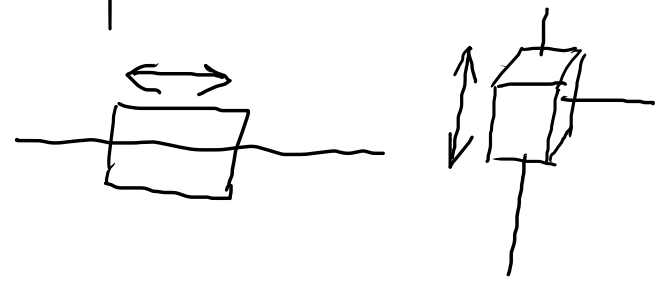
# Jelölések

Rotáció:



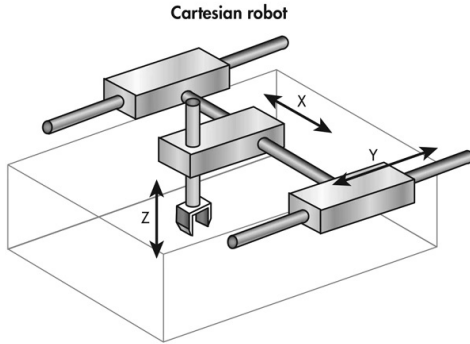
R

Transzláció:

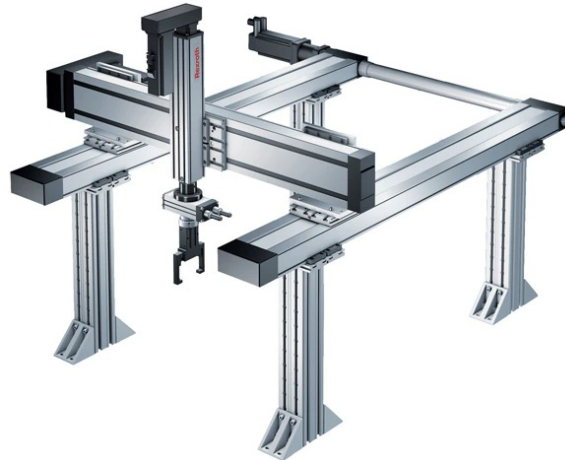


T

# Descartes Robot, Lineáris robot Ceartesian Robot

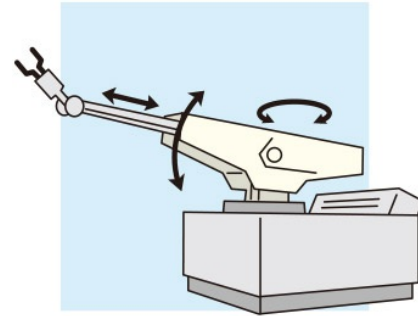
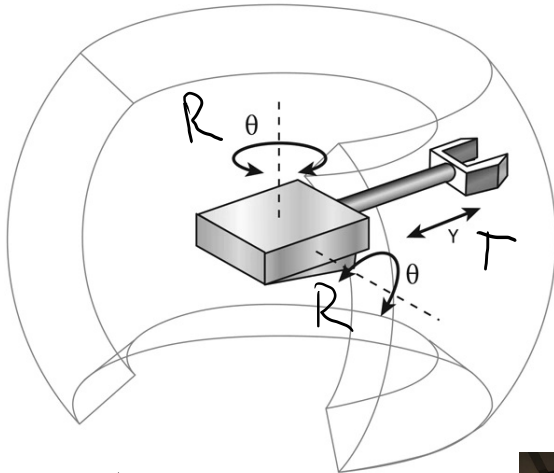


Csuklékeplet:  
TTT (R)



# Gömb koordinátás robot, polar robot, spherical robot

Polar robot

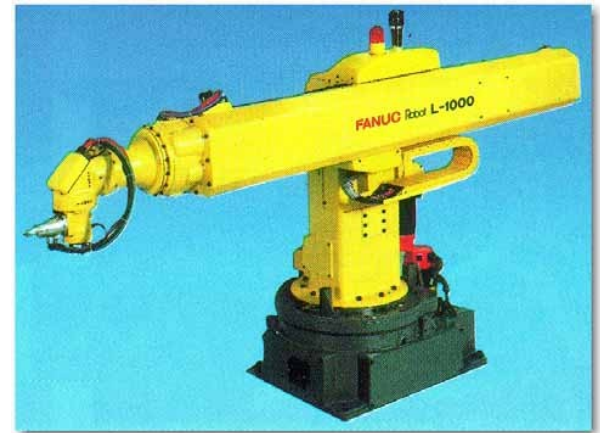
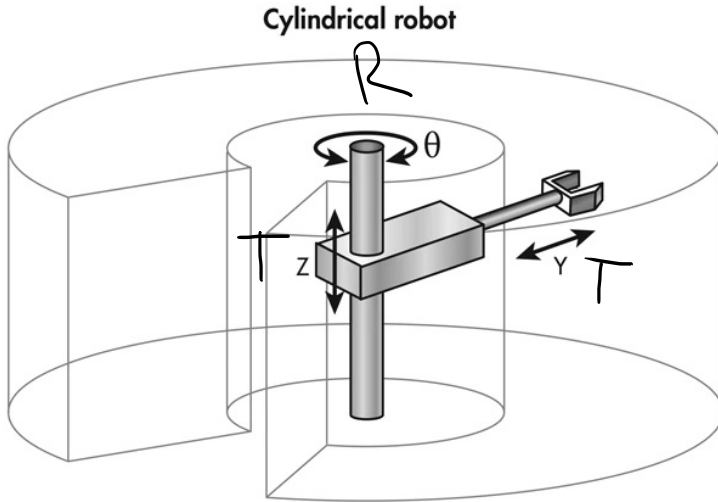


Csuklóképlet:  
 $RRT(RRR)$



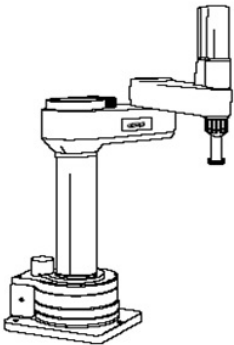
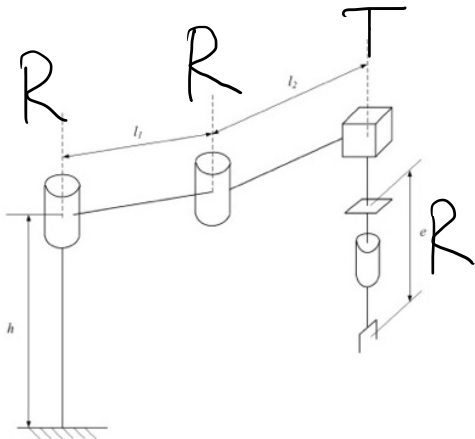


# Henger koordinátás robot, Cylindrical robot

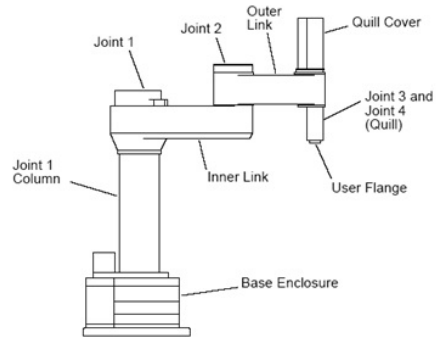


Csuklópálya:  
RTT (RRR)

# SCARA = Selective Compliance Articulated Robot Arm



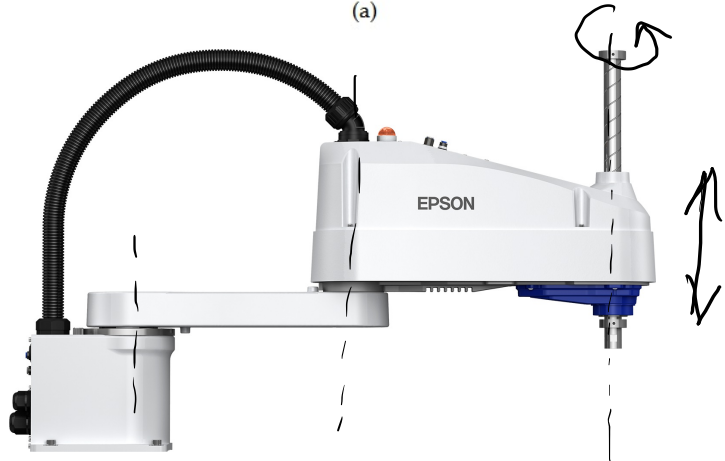
(a)



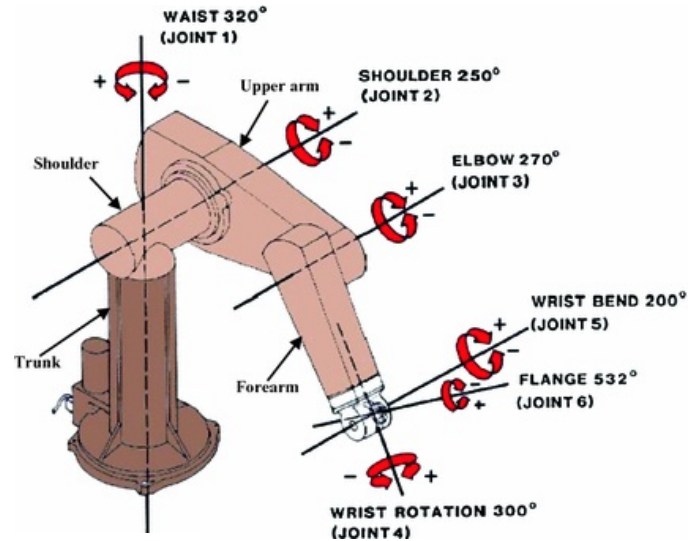
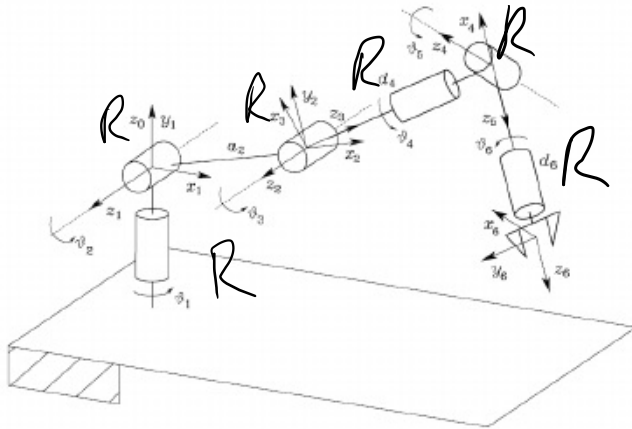
(b)

Csuklókeplet:

RRTR  
 $\overset{\vee}{R} \overset{\circ}{R} R T$



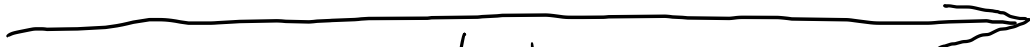
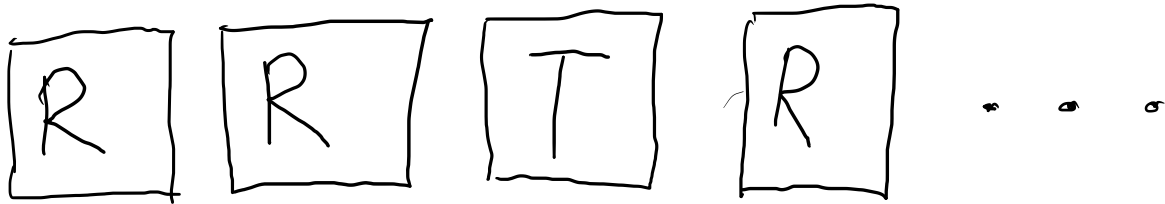
# Antropomorf robotkar, (Humanoid robotkar)



Csuklőkeplet:  
RRR RRR



# Csu klökeplet:



Bázis  
Rögzített  
kartag

kinematikai  
lánc

TCP  
Tool Center  
Point

Robot választás egy  
adott feladatra

- ~ Gazdaságosság / TCO  
Total Cost of  
Ownership
- ~ Mozgásképeség
- ~ Sebesség / Termelékenység
- ~ Munkatér mérete / alakja
- ~ Teherbírás / Payload
- ~ Egyéb tulajdonságok / extra funkciók

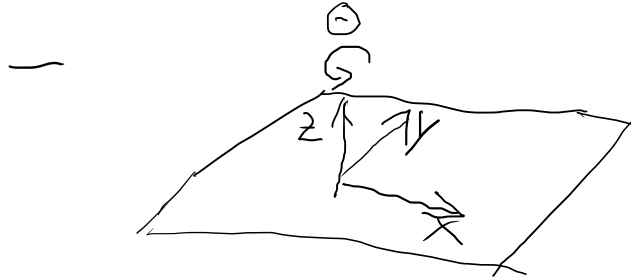
# Robot alkalmazásának elemzése a mozgásképeség szempontjából

- Robot Dof
- Feladat tér Dof
- Relatív redundancia
- Abszolút redundancia
- Vizsgálandó kérdések:
  - Hány tengelyű mozgás szükséges a feladat elvégzéséhez?
  - Melyik a feladat irányai transzláció/rotáció?
  - Melyik a legegyszerűbb robot konstrukció, ami alkalmas?

Példák:

- PCB beültetés

- 4 DoF :  $x, y, z, \odot$



- Robot:

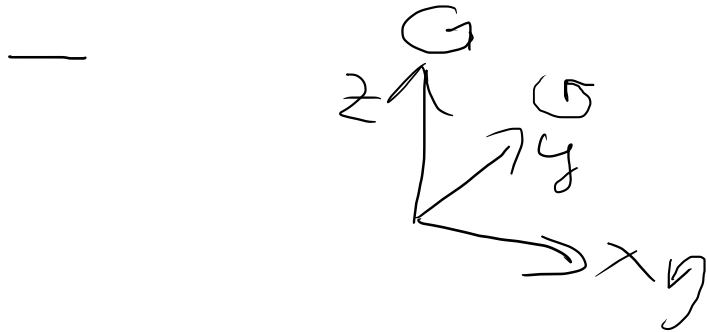
- Cartesian Robot + forgató

- SCARA

- Delta

# Karosszéria festés

– Min. 6 DoF,  $x, y, z$ , Roll, Pitch, Yaw



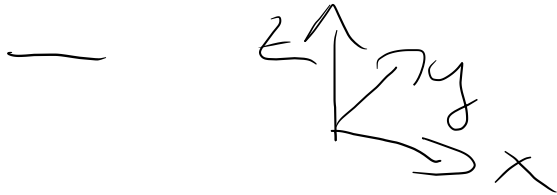
– Antropomorph robotkar  
6, vagy 7 DoF



# Karton dobozok palettázása

- Használó a PCB-hez

$x, y, z, \omega$



- Cartesian Robot (Portal)

- 4 DoF palettázó robot

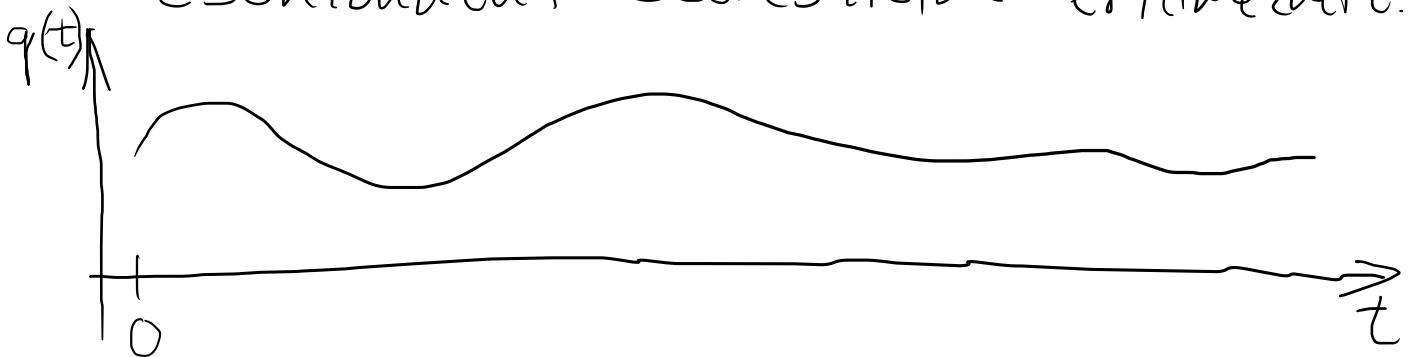
# Szerelőgépek klaszorgálása

- Többféle elrendezés létezője

egyszerű	átlagos	trükkös
3 DoF	4-6 DoF	7 DoF
Cartesian Robot (Portal)	Antropomorph kar	Redundáns Antropomorph kar

# Rugó, Tömeg, Csillapítás mechanikai rendszer vizsgálata

- A robot valamilyen előirt mozgást végez
- A Hálózat a előirt mozgás csuklóként szétcsoatolva értelmezhető:

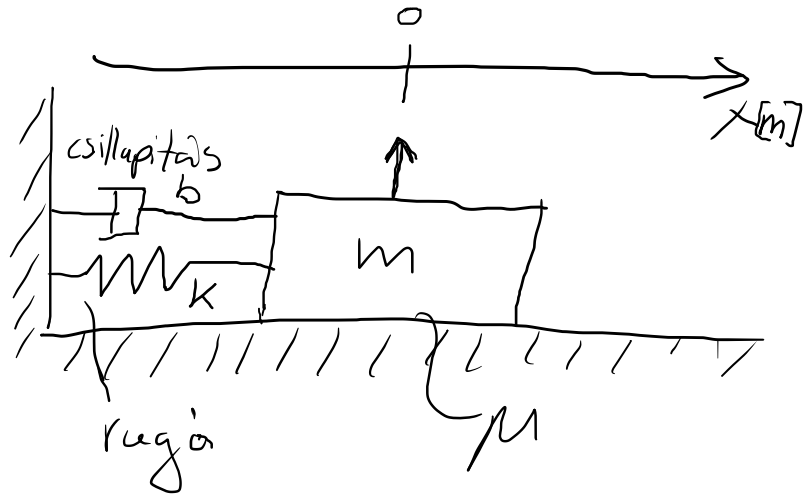


# A robot csukló mechanikai modellje

## Rotációs

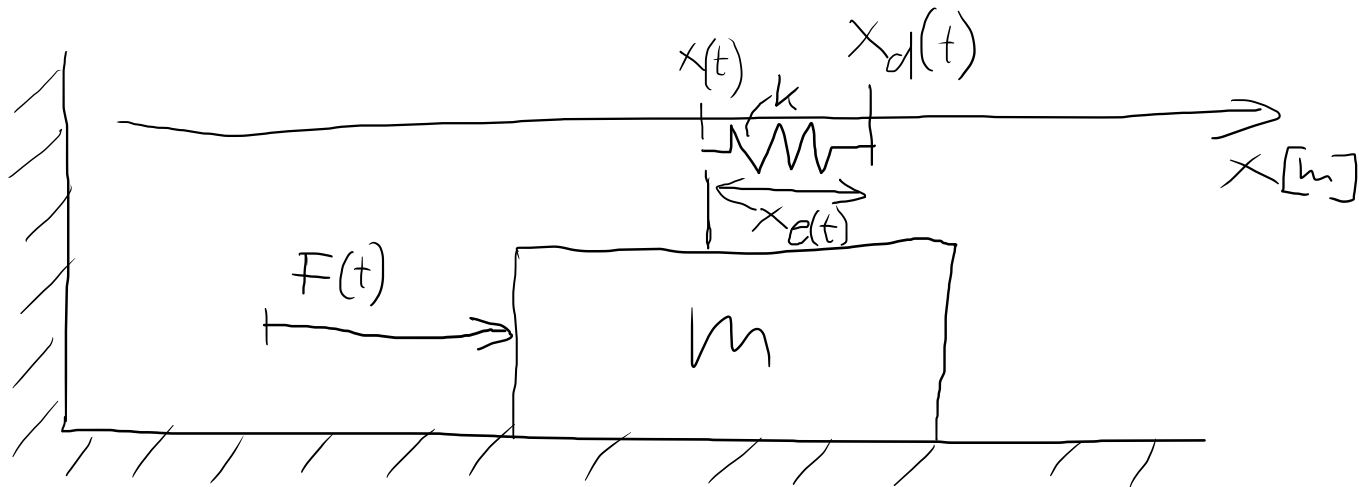


## Transzlációs



$m \rightarrow J$ : tehetetlenségi nyomaték  $[\text{kgm}^2]$   
 $k_t$ : torziós merevség  $[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}]$   
 $b_t$ : torziós csillapítás  $[\frac{\text{Nm s}}{\text{rad}}]$

$m$ : tömeg  $[\text{kg}]$   
 $k$ : merevség  $[\text{N/m}]$   
 $b$ : csillapítás  $[\frac{\text{Ns}}{\text{m}}]$



Cél:  $F(t)$ -t úgy irányítani, hogy  
 $x_e(t) \rightarrow 0$

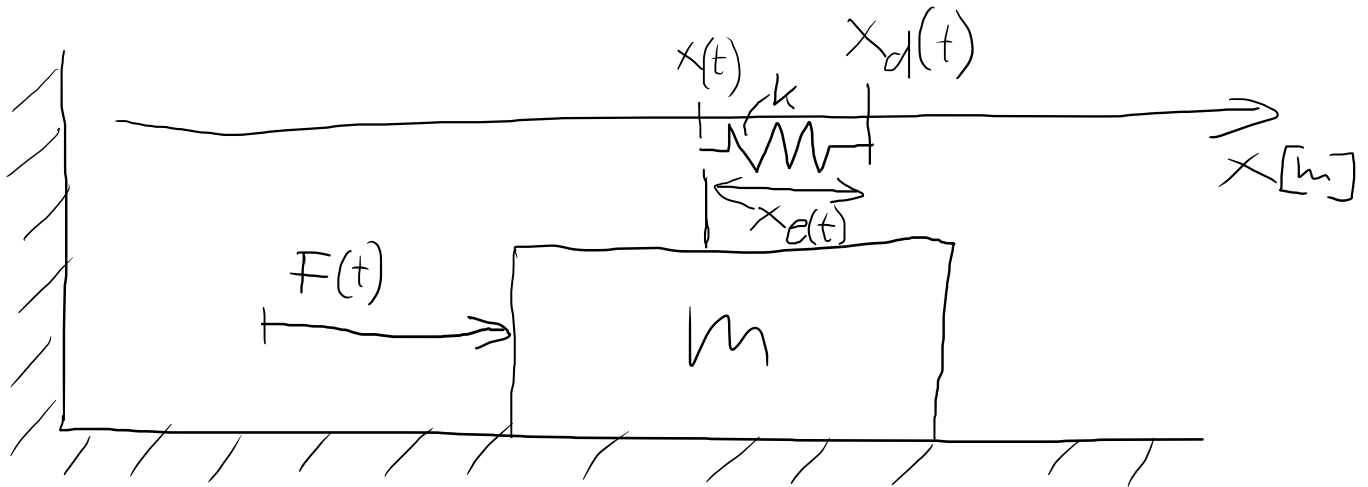
1. Arányos beavatkozás

$$F(t) = x_e(t) \cdot k \quad [m] \cdot \left[ \frac{N}{m} \right] = [N]$$

→ Oscilláció

Potenciális  $\leftrightarrow$  kinetikus

$$\frac{1}{2} k x^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$



Cél:  $F(t)$ -t úgy irányítani, hogy  
 $x_e(t) \rightarrow 0$

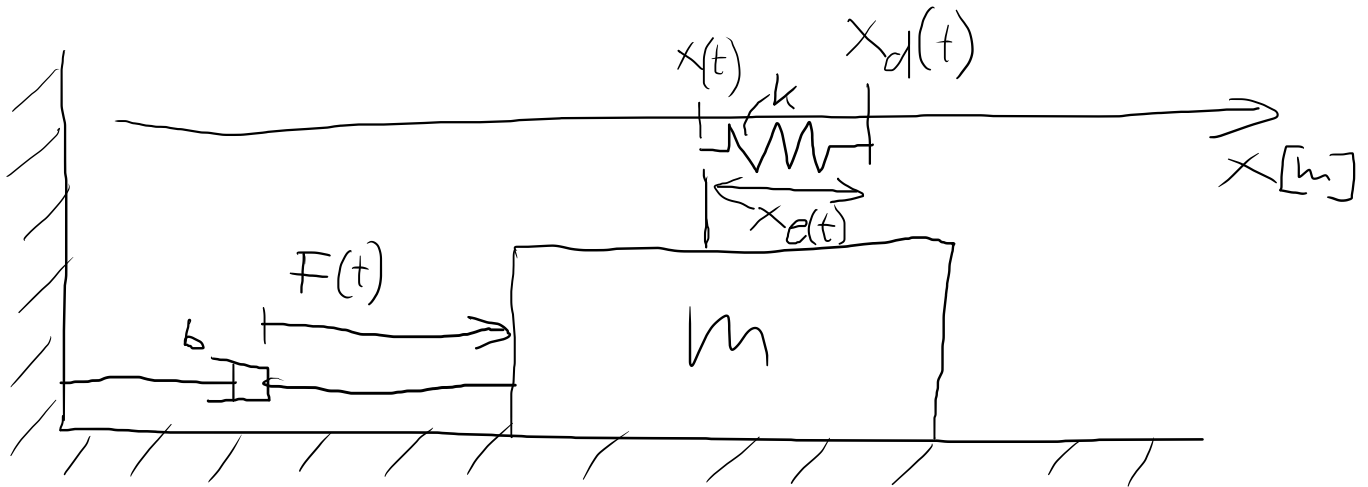
1. Arányos beavatkozás

$$F_k(t) = x_e(t) \cdot k \quad [m] \cdot \left[ \frac{N}{m} \right] = [N]$$

→ Oscilláció

Potenciális  $\leftrightarrow$  kinetikus

$$\frac{1}{2} k x^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$



Cél:  $F(t)$ -t úgy irányítani, hogy  
 $x_e(t) \rightarrow 0$

2. Differenciális hatás

$$F_b(t) = -b \cdot \dot{x}_e(t) \quad \left[ \frac{Ns}{m} \right] \cdot \left[ \frac{m}{s} \right] = [N]$$

Gyakorlati példa:

Lengőasztó

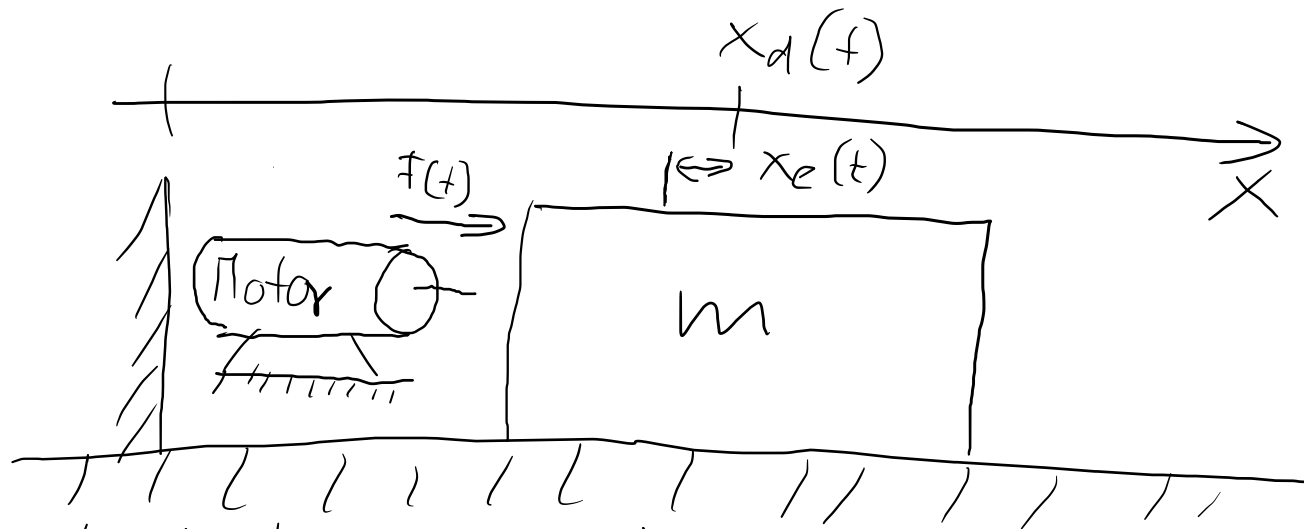


$$U_d = 0 = \text{állandó}$$

- Ne legyen lengés
- Finoman csukódjon
- Ne legyen túl lassú



# Gyakorlati megvalósítás a robotok esetében



Feladat:  $x_e(t) \rightarrow 0$   
 $t \rightarrow \infty$

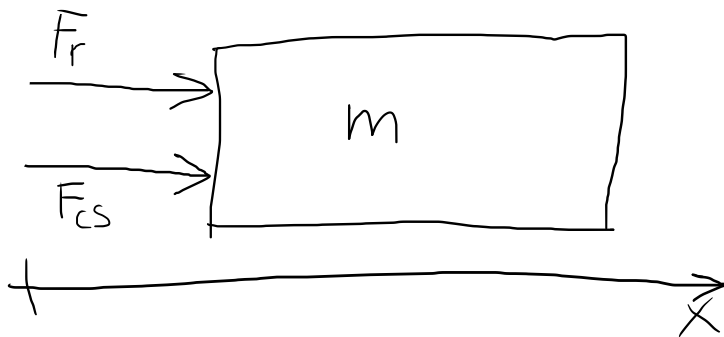
- gyors
- pontos
- stabil

$x_e(t)$ -t mérjük  
 $F(t)$ -t számítjuk  
A motort ehhez megfelelően vez.

# Mechanikai modell



Szabad test ábra



Mozgásegyenlet  
Newton II. alapján

$$\sum F = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_r + F_{cs} = m \cdot \ddot{x}$$

Mozgásegyenlet folyt.

$$F_r + F_{cs} = m \ddot{x}$$

$$k \cdot x + b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Csillapított  
szabad lengés  
mozgásegyenlete

EOM = Equation of Motion

$$\ddot{X} + \frac{b}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

- homogén
- lineáris
- másodrendű
- állandó együtthatós
- közönséges

differenciálegyenlet

# A mozgásegyenlet megoldása

$$\ddot{X} + \frac{b}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

Célszerű helyettesítéssel:

$$\ddot{X} + 2D\alpha \dot{X} + \alpha^2 X = 0$$

ahol „rad

$\alpha \left[ \frac{1}{s} \right]$  A csillapítatlan rendszer saját dörfrekvenciája

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$D [1]$  Relatív csillapítási tényező

$$D = \frac{b}{2m\alpha}$$

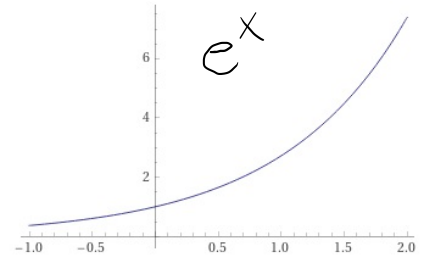
$$\left[ \frac{\frac{Ns}{m}}{kg \frac{1}{s}} \right] = \left[ \frac{kg m \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s}{m}}{\frac{kg}{s}} \right] \stackrel{=1}{=}$$

Megoldás exponenciális próbafüggvénygel

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t} \quad A, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda A \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 A \cdot e^{\lambda t}$$



behelyettesítve:

$$\underbrace{(\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2)}_{=0} \underbrace{Ae^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

karaktisztikus egyenlet

karakterisztikus gyökök

$$\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha \sqrt{D^2 - 1}$$

Három fontos eset

1.  $0 \leq D < 1$   $\rightarrow \lambda_{1,2} = -D\alpha \pm i\gamma \in \mathbb{C}$   
 $\gamma = \alpha \sqrt{1 - D^2} \left[ \frac{1''}{s} \right]^{\text{rad}}$   
a csillapított rendszert  
saját körfrekvenciája

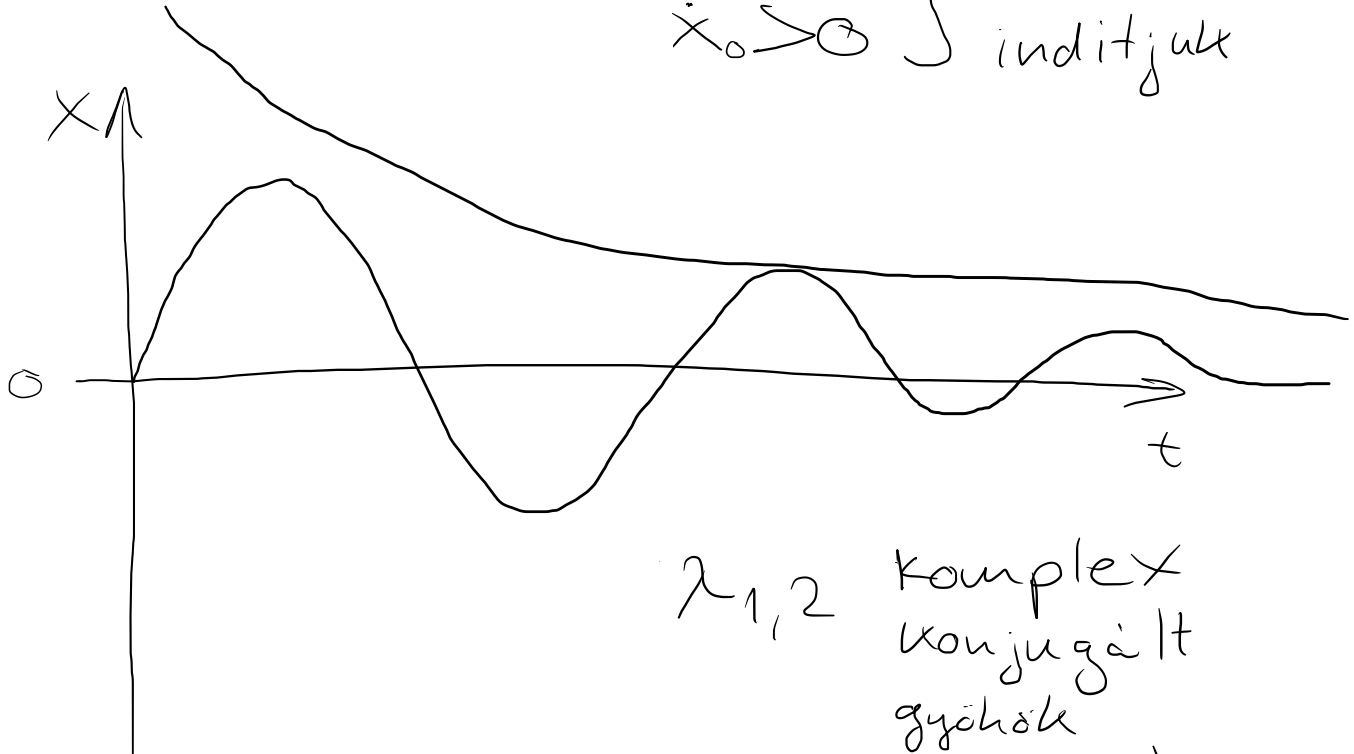
$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} =$$

$$= C_1 e^{-D\alpha t} \cos(\gamma t) + C_2 e^{-D\alpha t} \sin(\gamma t), \text{ ahol}$$

$$C_1 \text{ és } C_2 \quad \left. \begin{array}{l} x(0) = X_0 \\ \dot{x}(0) = U_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{kezdeti} \\ \text{feltételből adódnak} \end{array}$$

$$0 \leq D \leq 1$$

$x_0 = 0$   
 $\dot{x}_0 > 0$  } ütközéssel  
                  } indított



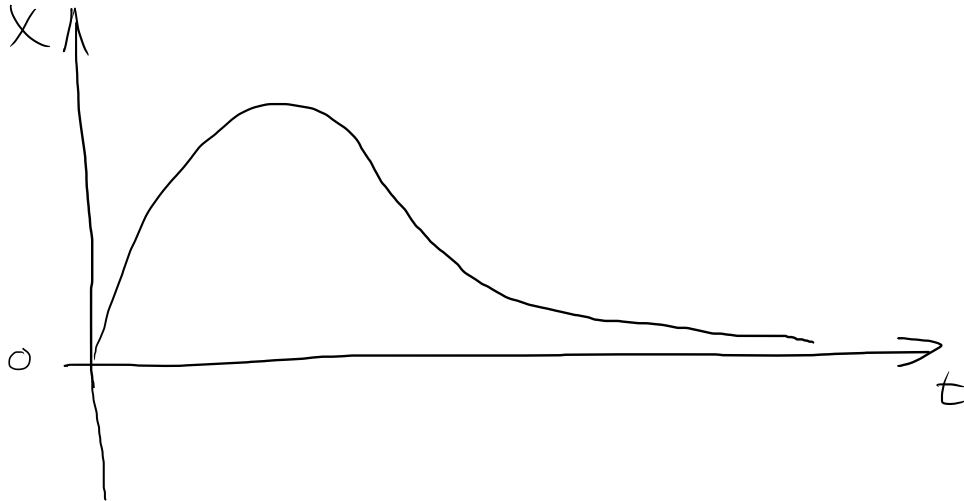
$\lambda_{1,2}$  komplex  
konjugált  
gyökök  
(pólusok)



②  $D = 1$  kritikus csillapítás

$$\lambda_{1,2} = -d$$

általános megoldás  $x(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\alpha t}$



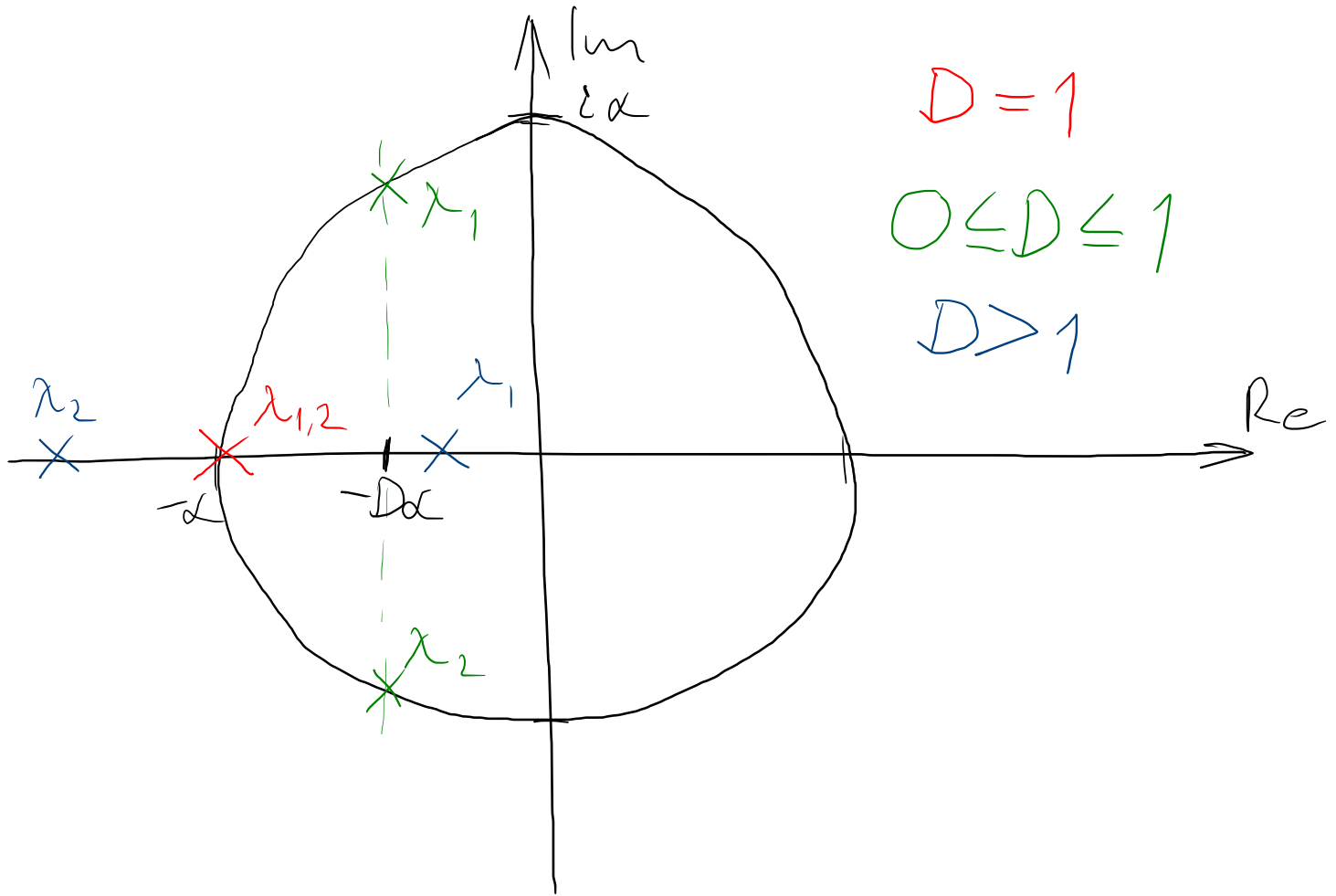
③

$D > 1$  túlcillapított  
rendszer

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$  valós gyökök

$$x(t) = A_1 \cdot e^{(-D + d\sqrt{D^2 - 1})t} + A_2 \cdot e^{(-D - d\sqrt{D^2 - 1})t}$$





$$D=1$$

$$0 \leq D \leq 1$$

$$D > 1$$

Prüfai jult ki!

<https://www.geogebra.org/m/sAAwEXgy>

[https://www.math.ksu.edu/~albin/apps/mass\\_spring.html](https://www.math.ksu.edu/~albin/apps/mass_spring.html)

<https://www.myphysicslab.com/springs/single-spring-en.html>

MATLAB live example:

<https://www.mathworks.com/help/symbolic/physics-damped-harmonic-oscillator.html>

MATLAB @ OE:

<https://www.mathworks.com/academia/tah-portal/obudai-egyetem-31149249.html>

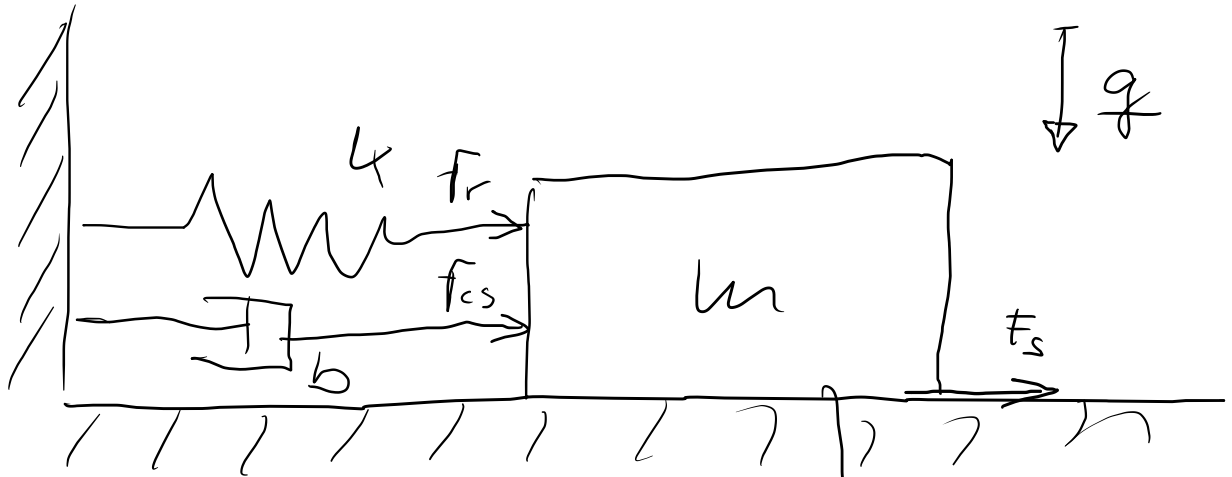
Eddig lényegében a PD szabályát  
vizsgáltuk.

Mi ezzel a baj?

gyors?	Igen
stabil?	Igen
pontos?	Nem

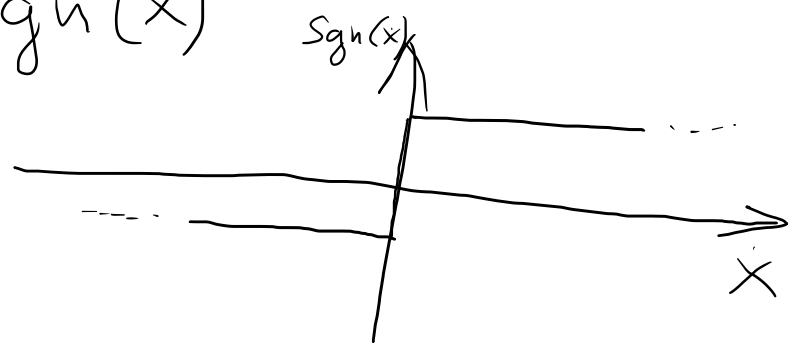
Digit. eset  
nem engine  
easy

→ sűrűdés



$\mu \neq 0$

$$F_s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \text{sgn}(x)$$



Következtetés:

Ha van szűrés sűrűsítés, akkor  
bármilyen nagy  $P$  mellett  
( $k$  mellett)  
is lesz maradék hiba!

Megoldás: Integráló hatás

$$F_I(t) = \int_0^t x_e(t) dt \cdot I \quad [N] = \left[ \frac{Vms}{ms} \right]$$

$[ms] \quad \left[ \frac{N}{ms} \right]$

A szabályozási törvény összefoglalva:

$$F(t) = \underbrace{P \cdot x_e(t)}_{k \cdot x} + \underbrace{D \cdot \dot{x}_e(t)}_{b \cdot \dot{x}} + I \cdot \int_0^t x_e(t) dt$$



A Robottechnika Alapjai

Robotcsatló technikai  
megvalósítása

„Építőelemek”

Mi kell egy aktív csatló megvalósításához?

- Aktuátor (motor)
- Irányító szerv
- Mérőrendszer
- Erőátvitel és mechanika
- Teljesítmény vezérlő szerv (teljesítmény elektronika)

# Aktuatorok

- Villanymotor (lineáris / forgó)
- Hidromotor (lineáris / forgó)
- Pneumatikus motor (lineáris / forgó)

(- fék)

Árnyékos szerv

— Digitális számítógép

— MCU

— FPGA

— SOC

— PC

# Működés

- Pozíció (lineáris, szög)
- Sebesség → közvetlen  
származtatott
- Erő / nyomaték / gyorsulás  
szöggyorsulás

# Erőátvitel, mechanika

- Ágyazás: - egyenesbe kerülés  
- forgó csapágyazás

- Hajtóművek, magassáतालátítók:

- Sebesség / nyomaték módosítás

- bolygó művek

- egyéb fogaskerék áttételek

- hullám hajtóművek

- szíjas hajtások

- Forgó → lineáris magassáतालátítók

- Menetes orsó - anya kapcsolat

# Teljesítmény vezérlő szerv

- Teljesítmény elektronika

- Digitális hajtás technika

- FET, IGBT

- Frekvenciával szabályozott híd kapcsol.

(

- Hidraulikus és pneumatikus hajtásoknál
- Elektronikusan vezérelt szelepek

)

# Szervo mechanizmus

- Beavatkozó
  - Mérérendszer
  - Szabályozó
  - Vezető szerv
- } együtt



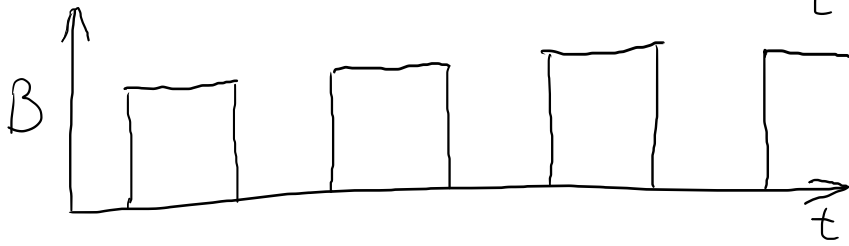
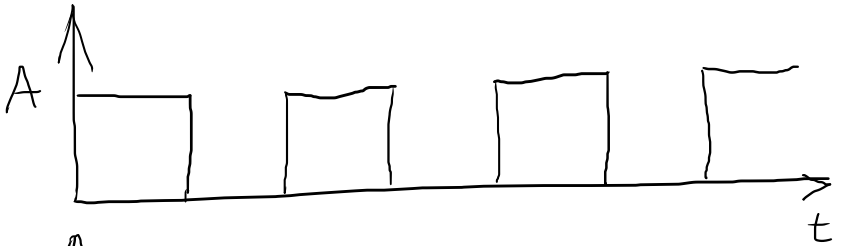
# Útmérés (rotációs / lineáris)

- Rendszeres

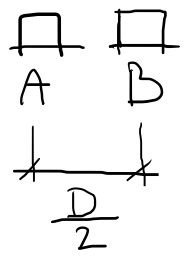
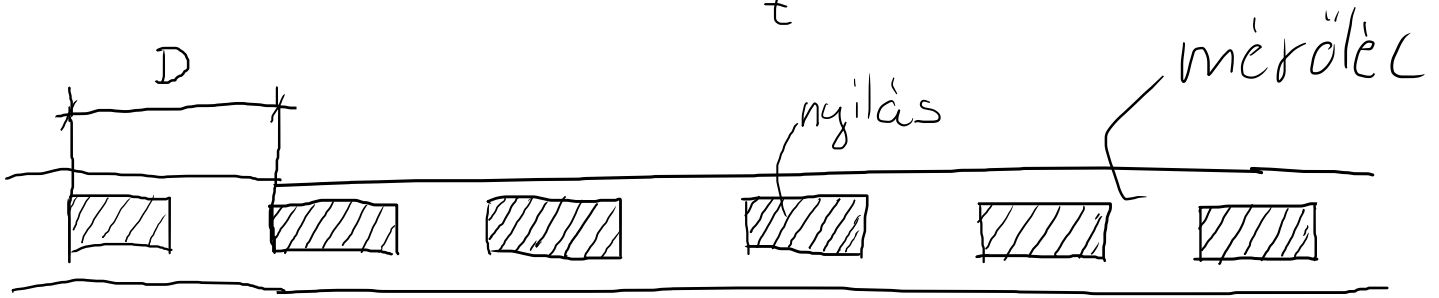
- Analóg vs. digitális

- közvetlen vs. közvetett

- Abszolút vs. inherentális

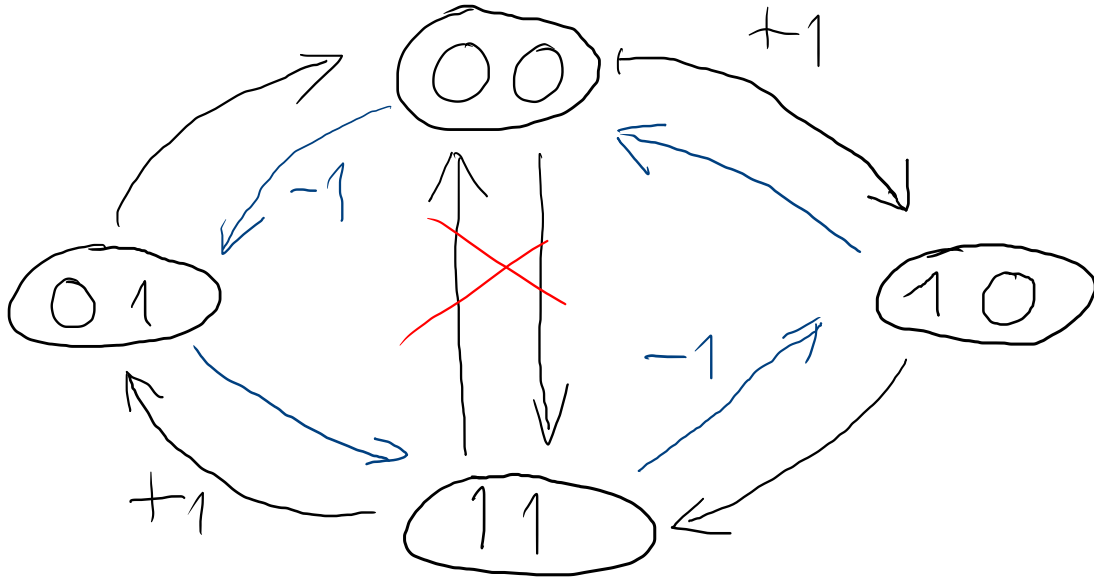


Lehet  
 - lineáris  
 - forgó



Optikai  
 szenzor

Allapa Hèr



Az inkrementális útmérés  
sajátosságai:

- kedvező ár
- A pozíció adat nem perzisztens!!!
- Referencia felvétel szükséges
- Felbontó képesség

$\frac{\text{imp}}{\text{ford}}$

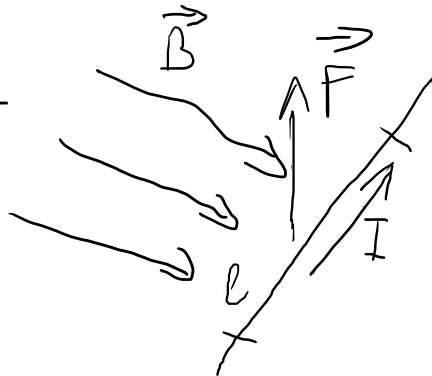
$\frac{\text{imp}}{m}$

Hajtas:

Leggyatrabban valamilyen villanymoterral  
találkozunk.

A legegyszerűbb működésű motor  
a kétfés DC motor

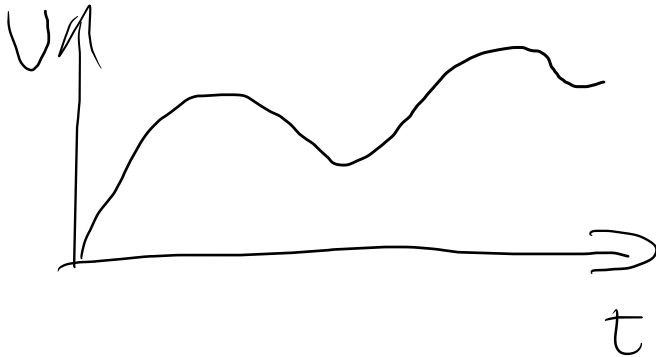
Alapelve:



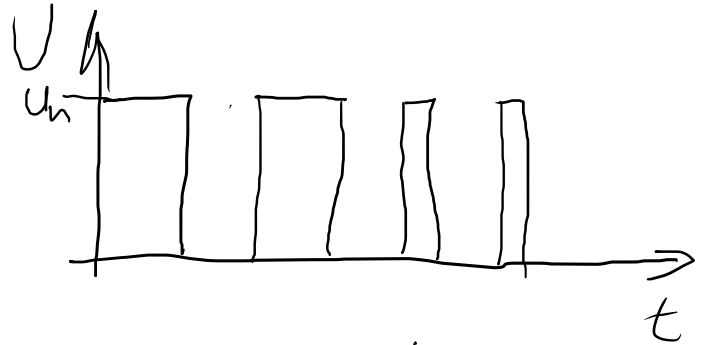
$$\vec{F} = \vec{B} \cdot \vec{I} \cdot L$$

# Kétfázisú DC motor hajfázisa

- A motor fázisaira fenőtseget adunk

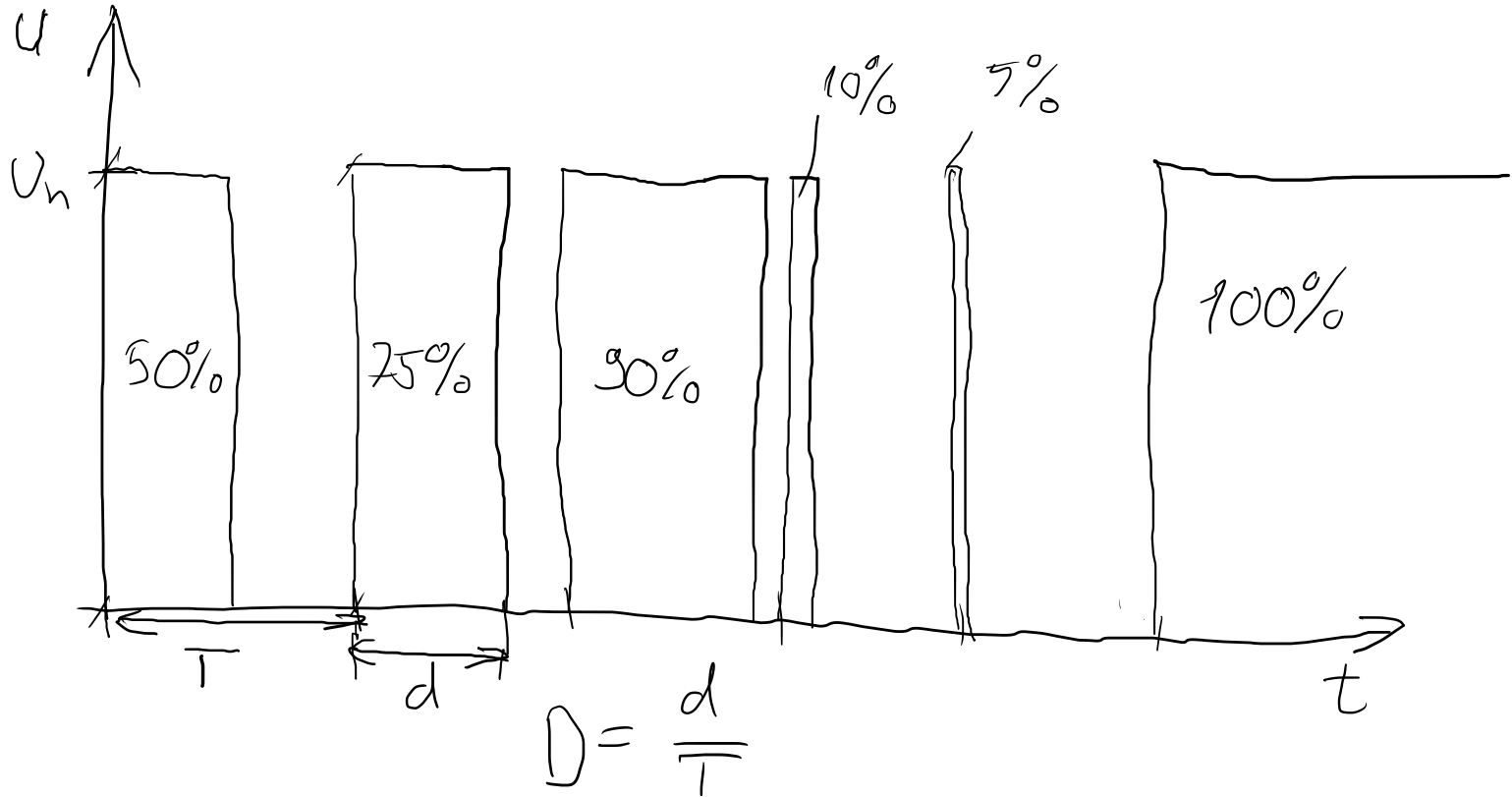


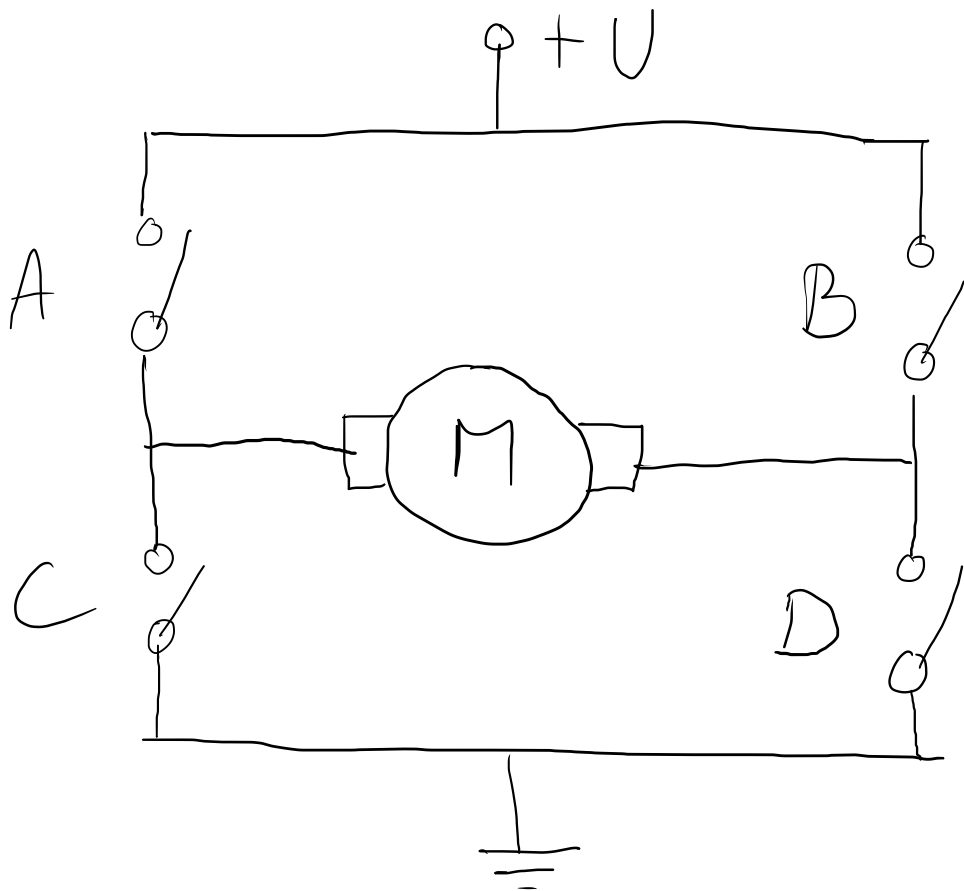
Analog



Digitális  
PWM

PWM = Pulse Width Modulation

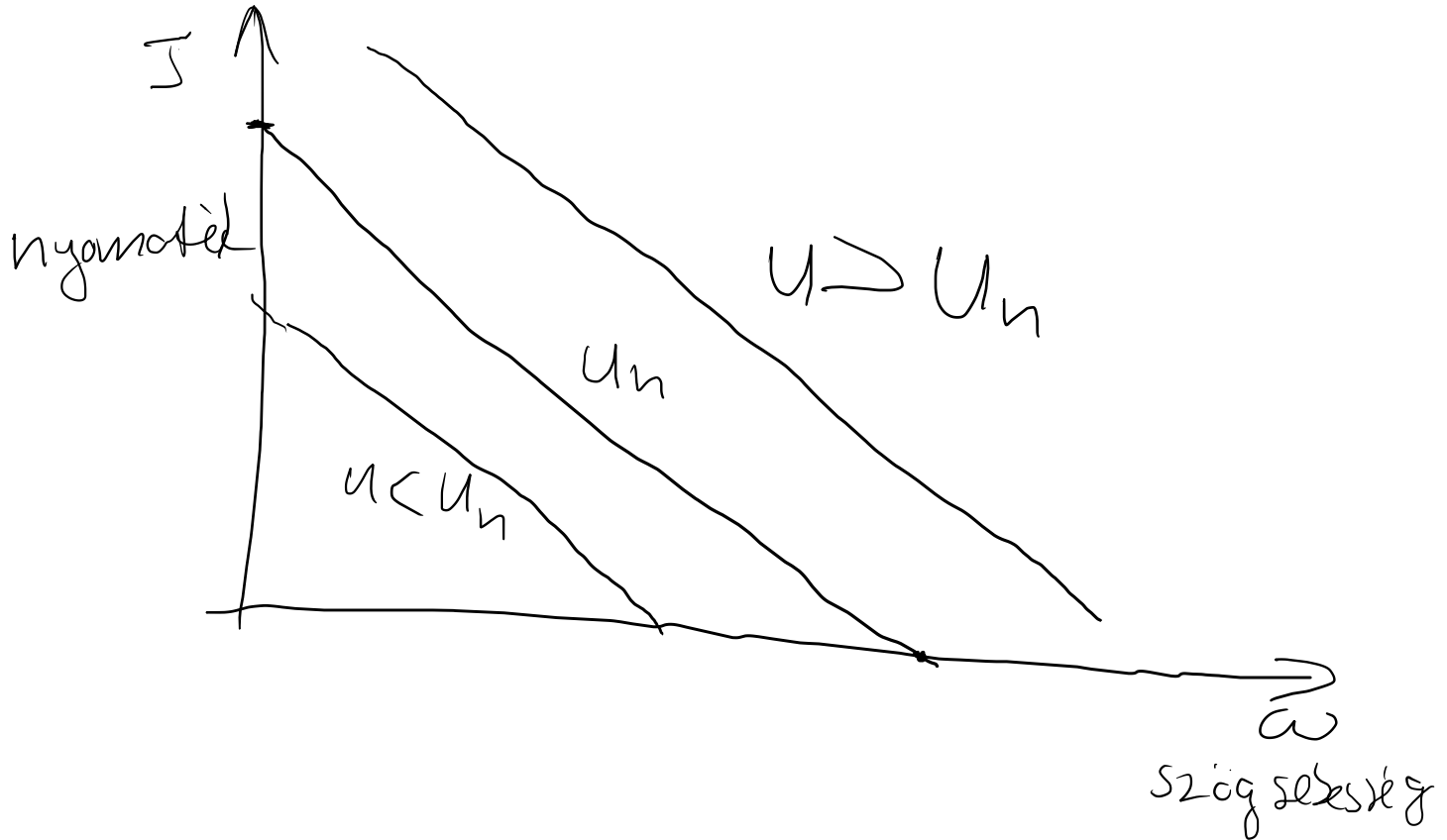




	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\times$	$\times$
<i>A</i>	1	0	1	?
<i>B</i>	0	1	?	1
<i>C</i>	0	1	1	?
<i>D</i>	1	0	?	1



# DC motor viselkedése



$$I = k \cdot I \approx k \cdot \frac{U}{R} = k \cdot \frac{U_k - \overset{= k \cdot \omega}{U_{\text{induktion}}}}{R}$$

# Motor típusok

- kétfés DC motor

- Léptetőmotor

- BLDC  $\approx$  PMSM

↑  
kétfés vékéli  
DC motor

↑  
Állandósebességű  
szinkronmotor

- Indukciós motor (Aszinkron AC motor)

# DC motor

- Nagyon elterjedt (+)
- Egyszerű a hajtása (+)
  - H-brid
  - nem kell halló szenzor
- Komplikált a felépítése (-)
  - forgó teheres
  - kommutátor (-)
- A forgó teheresről nehéz a hő elvezetni

# Léptetőmotor

- Glossé, egyszerű, robusztus kialakítás  $\oplus$
- Fő jellemzője
  - Lépés szög pl.  $0,5^\circ$
  - Billenő nyomaték  $\uparrow$
- Spec. meghajtó elektronika kell  $\ominus$
- Nyitott vértelés lehetséges  $\oplus$
- Álló helyzetben is van áram felvétele  $\ominus$



BLDC

PMSM

- A forgórész állandó mágnes
- Az állórész 3 fázisú tekercselés

- Egyszerű felépítés
- Nagy teljesítmény sűrűség (erős mágnesek)
  - Ritka földfém mágnesek
- A hűtést könnyű megvalósítani
- A hajtása szenzorokot igényel
- A hajtása komplikált jel feldolgozást igényel

# Mobil Robotok

## Definíció:

- Autonóm rendszer
- Természetes és mesterséges akadályok között boldogul
- Valamilyen mozgás/haladási képesség:
  - kerék, lábak, láncotlp, stb.
- Opcionálisan: Valamilyen manipulátor
- Előre tervezett/programozott műveletet végez
- Figyelmebe veszi a környezet állapotát.

# Csoportosítási szempontok

- Mozgáskondor
  - kerékes
    - **Differenciális hajtás**
      - gépkocsi-szerű
      - tricikli-szerű
      - Omni-wheel rendszer
- Használati hely
  - kültér (rover)
  - beltér
- Autonom működés
  - ← köztes →
  - távvezérlés Full Autonom



# Navigáció

Cél: - A robot eljuttatása egy adott célhelyzetre autómódú módon

- A robot helyzetének nyomonkövetése

SLAM = Simultaneous Localization and Mapping

Odometria: A robot a saját szenzoraival következteti az elmozdulását

# Az Odometria hibaforrásai

Szisztematikus  
hiba  
(kompenzálható)

- Minden, ami geometriai pontatlanság
  - nyújtás hiba
  - keréhatároló hiba
  - kerék központosság hiba
- Méző hordozó korlátozása
  - encoder felbontás
  - sampling rate

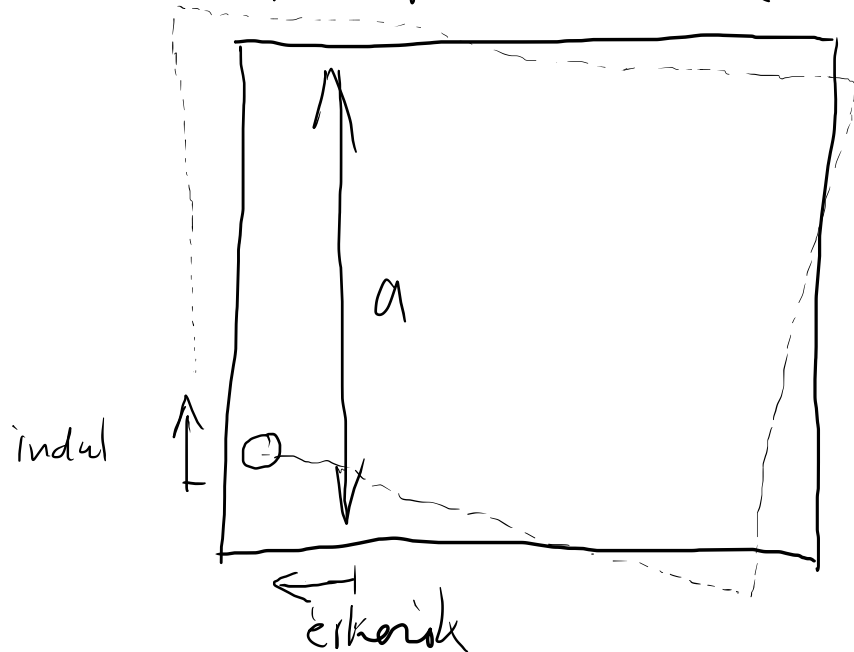
NEM szisztematikus  
hiba  
(nem kompenzálható)

- Talaj egyenetlenségek
- Sűrűdés, víznyelők egyenetlensége
- Hirtelen manőver
- ütközés
- Free wheel / bevasárló-  
irányjelzés

A pontosság becslése egyszerű kísérlettel

## Square Path Test

- unidirectional
- bidirectional



# Szenzorok a mobil robotokon (Navigáció segítése céljából)

- A leggyakoribb: nyomógomb (1 bit)

- Távolság szenzorok (Range Finder)

- infra

- ultrahang

- Laser

} TOF

$$c_i \approx 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$d = \frac{c_i \cdot t_{ping}}{2} \quad [\text{m}]$$

- Kamerák

- fény intenzitás szenzor

- vonal szenzor

- CCD mátrix

- több kamera

# Szenzorok folytatás

- IMU (Inertial measurement units)
  - gyorsulásmérő
  - gyroscope
  - iránytű } közös tokban  
3DoF IMU

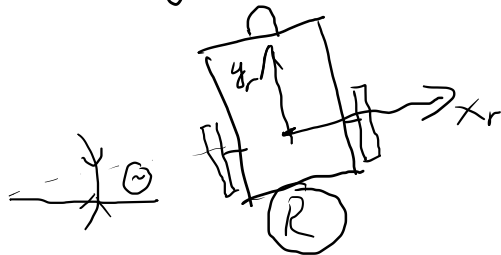
## MEMS

- 3D Lidar
- Egyéb integrált szenzor egységek

# Mobil Robotok mozgása

Hány Dof a diff. hajtású mobilrobot?

- A konfigurációs tér 3 dimenziós
- A hajtásrendszer  $2\frac{1}{2}$  Dof



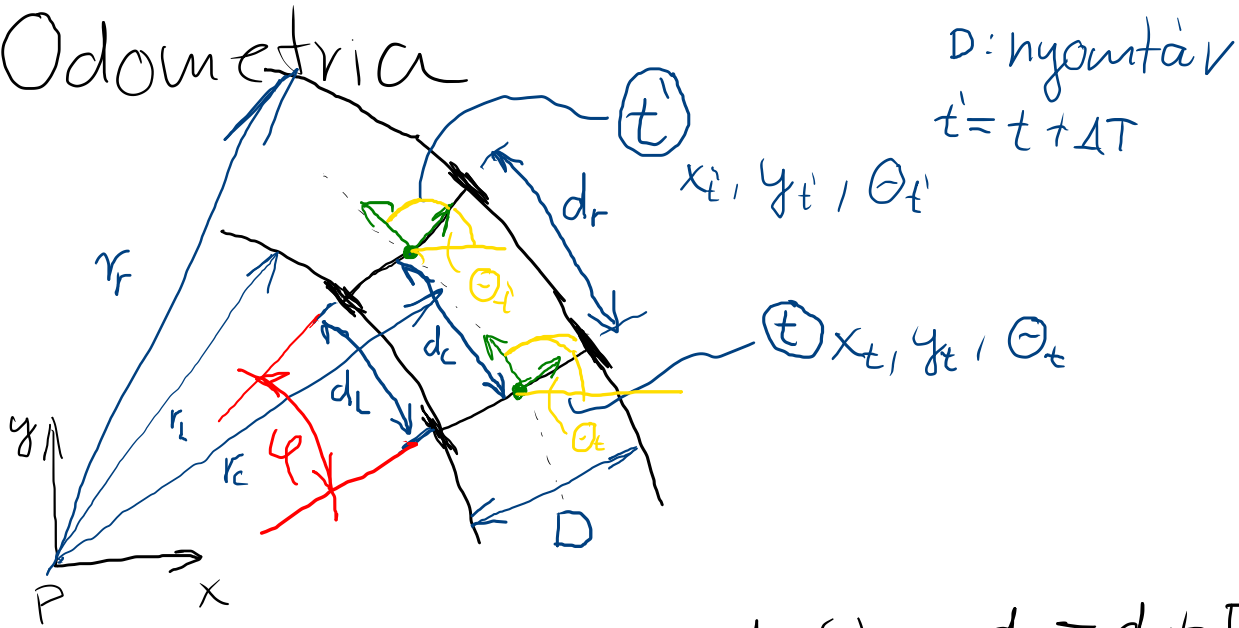
$$q_f = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Konfiguráció

Anholonóm hajtás

A sebesség és rögzítésség nem tetraédres

# Odometria



$$d_c = \frac{d_l + d_r}{2} \quad (1)$$

$$\varphi \cdot r_l = d_l \quad (2)$$

$$d_r = d_l + D \quad (4)$$

$$\varphi \cdot r_r = d_r \quad (3)$$

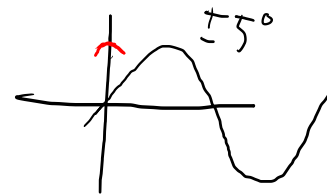
$$(3) - (2): \varphi \cdot r_r - \varphi \cdot r_l = d_r - d_l \rightarrow \varphi \cdot D = d_r - d_l \quad \varphi = \frac{d_r - d_l}{D}$$

$$(P) \quad P_x = x - r_c \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = x - r_c \cdot \sin \theta$$

$$P_y = y - r_c \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = y - r_c \cdot \cos \theta$$

(x')

$$\begin{aligned}x' &= P_x + r_c \cdot \cos\left(\varphi + \Theta - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= x - r_c \cdot \sin\Theta + r_c \cdot \sin(\varphi + \Theta) = \\ &= x + r_c \left(-\sin\Theta + \sin\varphi \cdot \cos\Theta + \sin\Theta \cos\varphi\right)\end{aligned}$$



(y')

$$\begin{aligned}y' &= P_y + r_c \cdot \sin\left(\varphi + \Theta - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= y + r_c \cdot \cos\Theta - r_c \cdot \cos(\varphi + \Theta) = \\ &= y + r_c \left(\cos\Theta - \cos\varphi \cdot \cos\Theta + \sin\Theta \cdot \sin\varphi\right)\end{aligned}$$

Linearization:  $\sin\varphi \rightarrow \varphi$      $\cos\varphi \rightarrow 1$      $\boxed{\begin{matrix} +5^\circ \\ -5^\circ \end{matrix}}$

$$\begin{aligned}x' &= x + r_c \left[-\sin\Theta + \varphi \cdot \cos\Theta + \sin\Theta\right] \\ &= x + r_c \cdot \varphi \cdot \cos\Theta = x + d_c \cdot \cos\Theta\end{aligned}$$

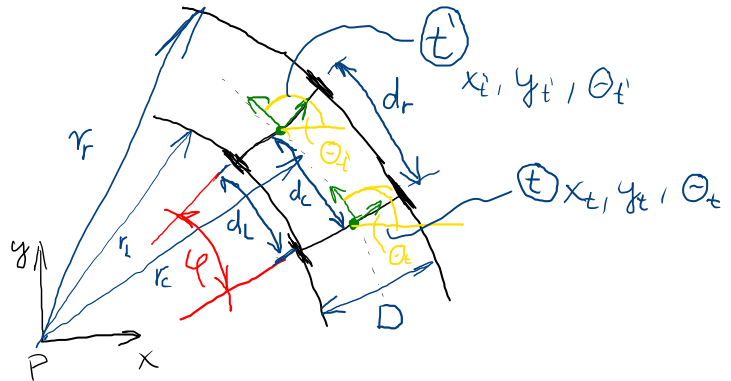
$$y' = y + r_c \left[\cos\Theta - \cos\Theta + \varphi \cdot \sin\Theta\right] = y + r_c (\varphi \cdot \sin\Theta) = y + d_c \cdot \sin\Theta$$



Összetoglalva:

$$d_c = \frac{d_l + d_r}{2}$$

$$\varphi = \frac{d_r - d_l}{D}$$



$$\theta' = \theta + \varphi$$

$$x' = x + d_c \cos \theta$$

$$y' = y + d_c \sin \theta$$

# Transzformációk

- Eltolás (Translation)
- Forgatás (Rotation)

← Robotika

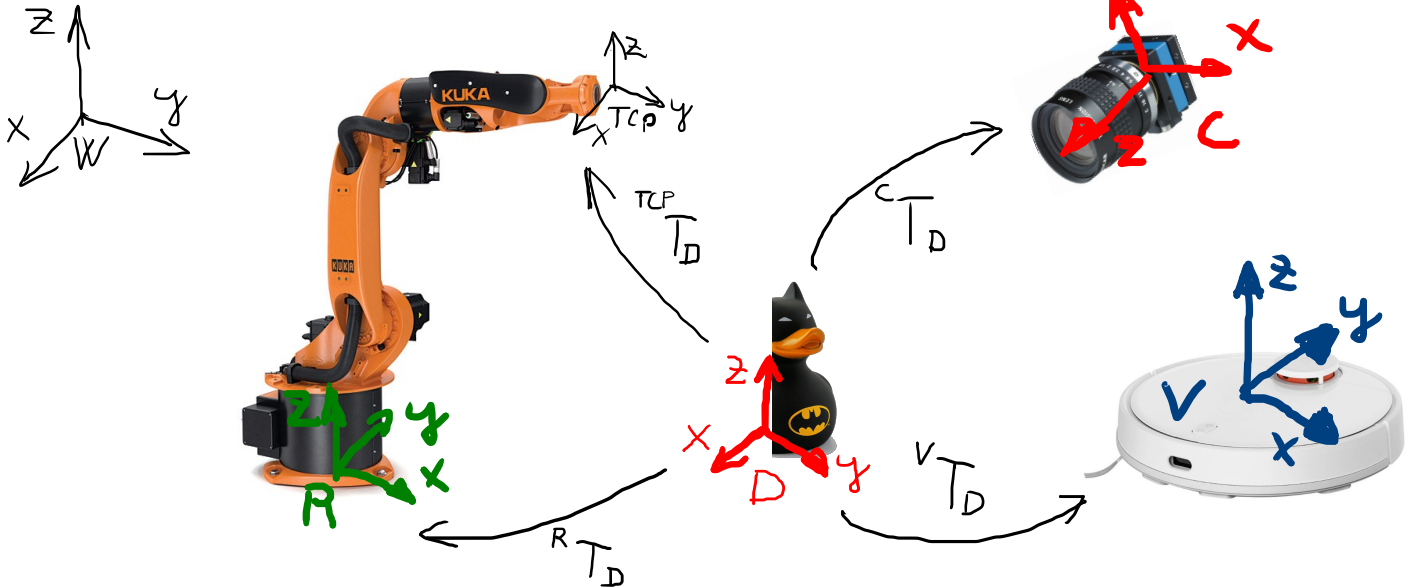
- Skálázás (scale)
- Csúsztatás (skew)

kétféle értelmezés!

- Passzív (Mapping)
- Aktív (Operator)

# Passzív értelmezés (Mapping)

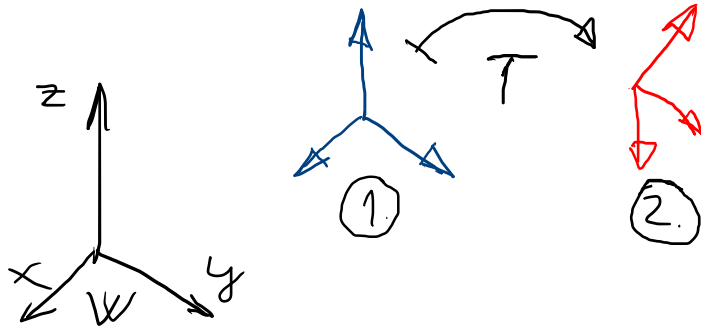
Testekhez rögzített koordináta-rendszerek helyzetének leírása különböző koordináta rendszerekben



# Aktív értelmezés (Operator)

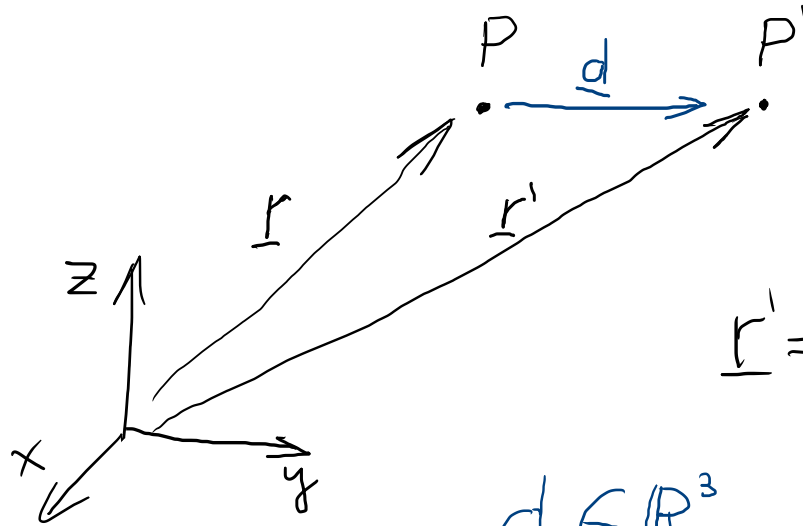
Amikor egy objektum helyzetének megváltoztatására, operátorként használjuk.

helyzet = pozíció, orientáció



# Eltolás

Aktív

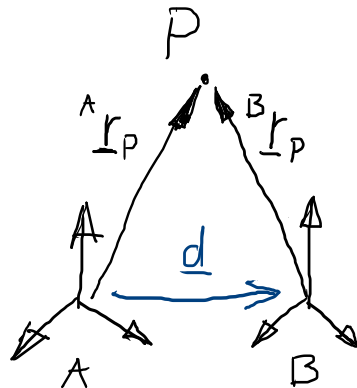


$$\underline{r}' = \underline{r} + \underline{d}$$

↑  
eltolás  
vektor

$$\underline{d} \in \mathbb{R}^3$$

Passzív

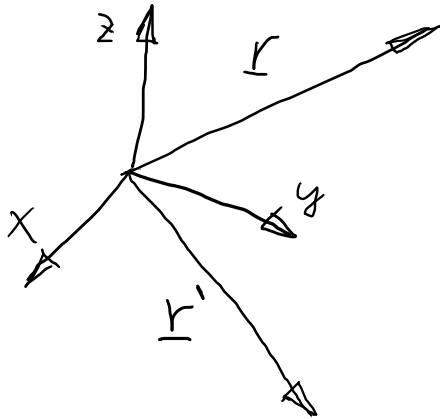


$${}^B \underline{r}_P = {}^A \underline{r}_P - \underline{d}$$

↑  
eltolás  
vektor

# Forgatás

Aktív



$$\underline{r}' = \underline{R}^T \cdot \underline{r}$$

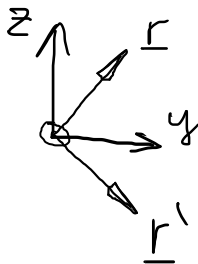
↑  
forgatási  
matrix

$$\underline{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

3D forgatás csoport  $SO(3)$

## Példa

forgatás  
x körül  
-90°-kal



$$\underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

# Octave Online - ban

```
1 R = [1 0 0; 0 cos(-pi/2) sin(-pi/2); 0 -sin(-pi/2) cos(-pi/2)]
2 r = [0; cos(pi/4); cos(pi/4)]
3 rr = R'*r
```

R =

```
1.0000      0      0
      0  0.0000 -1.0000
      0  1.0000  0.0000
```

r =

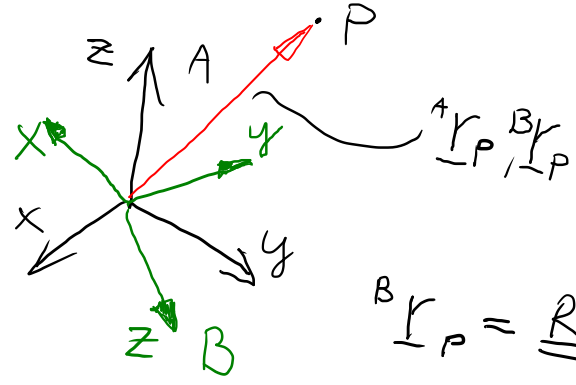
```
      0
  0.7071
  0.7071
```

rr =

```
      0
  0.7071
 -0.7071
```

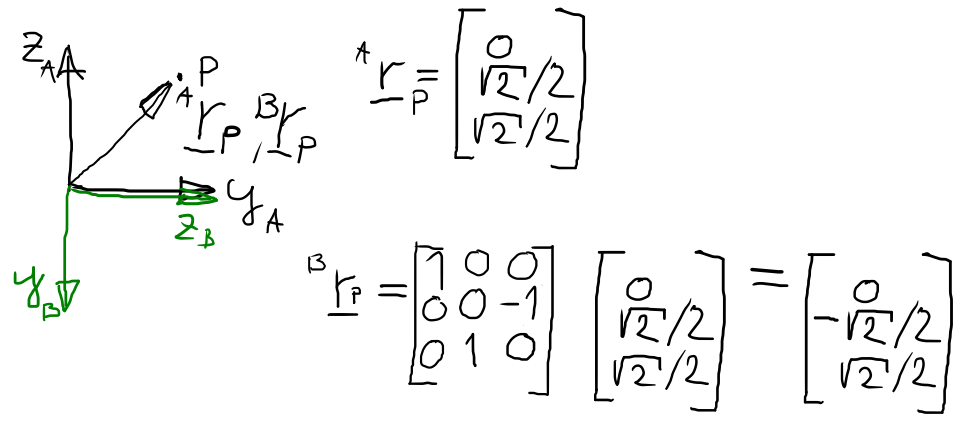
# Forgatás

Passzív



$\underline{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  3D forgatás csoport  $SO(3)$

Példa  
forgatás  
x körül  
 $-90^\circ$ -kal





# A forgatási mátrix

$\mathbb{R}$   $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  3D forgatás csoport  $SO(3)$

Tulajdonságok

– Ortogonalitás  $\underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{R}}^{-1} \rightarrow \det(\underline{\underline{R}}) = \pm 1$

$$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{I}}$$

$\det(\underline{\underline{R}}) = 1$   
tiszta  
forgatás

$\det(\underline{\underline{R}}) = -1$   
tükrözéses  
forgatás

– Forgatási mátrixok szorzata is forgatási mátrix

# A Forgatási mátrix "belseje"

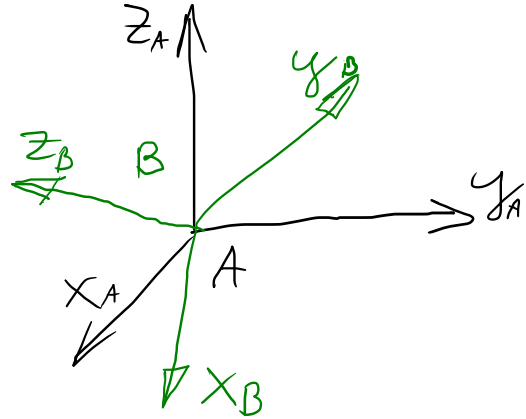
$${}^A_B \underline{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

A bázis vektorokra

$${}^A \underline{x}_B = {}^A_B \underline{R} \cdot {}^B \underline{x}_B$$

$${}^A \underline{x}_B = {}^A_B \underline{R} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^A \underline{y}_B = {}^A_B \underline{R} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B \underline{R} = \begin{bmatrix} {}^A \underline{x}_B & {}^A \underline{y}_B & {}^A \underline{z}_B \end{bmatrix}$$

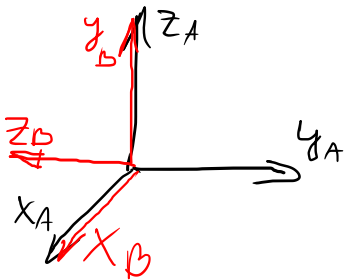


$${}^A \underline{z}_B = {}^A_B \underline{R} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^A_B \underline{R} = {}^B_A \underline{R}^T = {}^A_B \underline{R}^{-1}$$

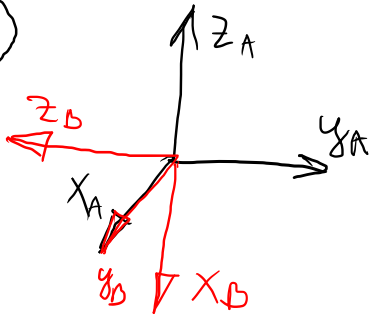
# Egyszerűen belátható példák

1.



$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.



$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Azonnal le lehet olvasni!

# Elemi forgatások

$$\underline{\underline{R_x}}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & s\alpha \\ 0 & -s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R_y}}(\beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R_z}}(\gamma) = \begin{bmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— Minden forgatás felírható legfeljebb 3 elemi forgatás szorzataként

— Egy keret tetszőleges orientációjára vihető át egyetlen megfelelő tengely körüli, megfelelő szöggel történő forgatással  
(Euler forgatási tétel)

# Egyéb forgatás reprezentációk

## — Forgatási mátrix

- Euler szögek
- Roll, Pitch, Yaw } sok változat
- angle - axis
- forgatási vektor
- egység quaternion

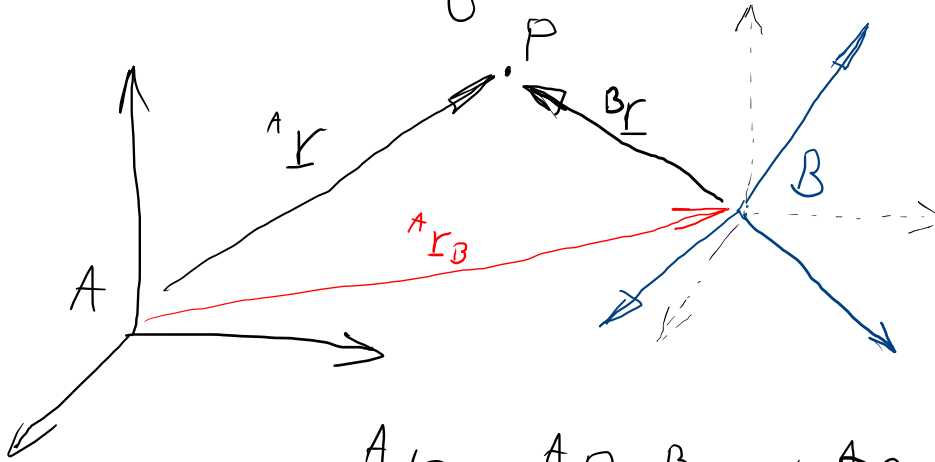
Hasznos források

<https://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html>

[https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_rotation\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_rotation_group)

<https://www.andre-gaschler.com/rotationconverter/>

# A' Halános transzformáció eltolás + forgatás



$$\underline{A_r} = \underbrace{\underline{A_rB} \cdot \underline{B_r}}_{1. \text{ egységes orientáció}} + \underbrace{\underline{A_rB}}_{2. \text{ eltolás}}$$

Sorozatos műveletvégzés kényelmetlen  
az összeadás miatt.

# Homogén transformáció

$$\underline{A}r = \underline{B}R \cdot \underline{B}r + \underline{A}r_B$$



$$\begin{bmatrix} \underline{A}r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}R & \underline{A}r_B \\ \underline{O}^{3 \times 1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}r \\ 1 \end{bmatrix}$$

A homogén koordináták bevezetésével egyetlen mátrix szorzással valósítható meg a transformáció!



A homogén transformációs mátrix

$$\begin{matrix} B \\ A \end{matrix} \underline{\underline{T}} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{R}} & \underline{\underline{A}} \underline{\underline{r}}_B \\ \underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}} & \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{r}}_B \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \end{matrix} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$3 \times 3$ 
 $1 \times 3$ 
 $3 \times 1$ 
 $1 \times 1$

Inverz transformáció

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \underline{\underline{T}}^{-1} = \begin{matrix} B \\ A \end{matrix} \underline{\underline{T}} = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}}^T & \begin{matrix} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{r}}_A \\ -\underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{r}}_B \end{matrix} \\ \underline{\underline{B}} \underline{\underline{R}} & \end{matrix} & \begin{matrix} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{r}}_A \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$B \underline{\underline{r}}_A$