Rugó, Tömeg, Csillapítás mechanikai rendszer vizsgálata

Varga Árpád

-

Robottechnikai Szakkollégium

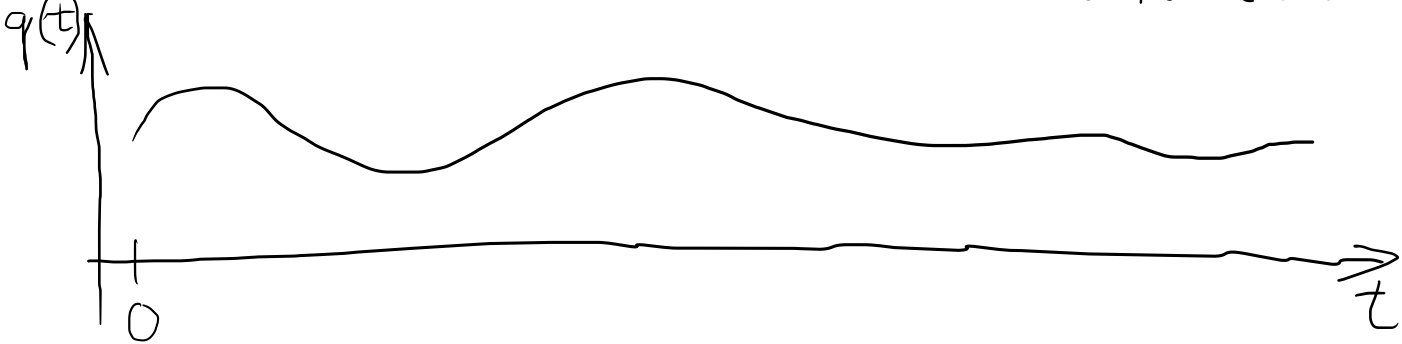
NTP-SZKOLL-21-0034 Robottechnikai Szakkollégium - Tehetséggondozás és szakmai közösségépítés az OE ROSZ-ban – 3 500 000 Ft támogatás

MINISZTERELNÖKSÉG

Nemzeti Tehetség Program

Rugó, Tömeg, Csillapítás mechanikai rendszer vizsgálata

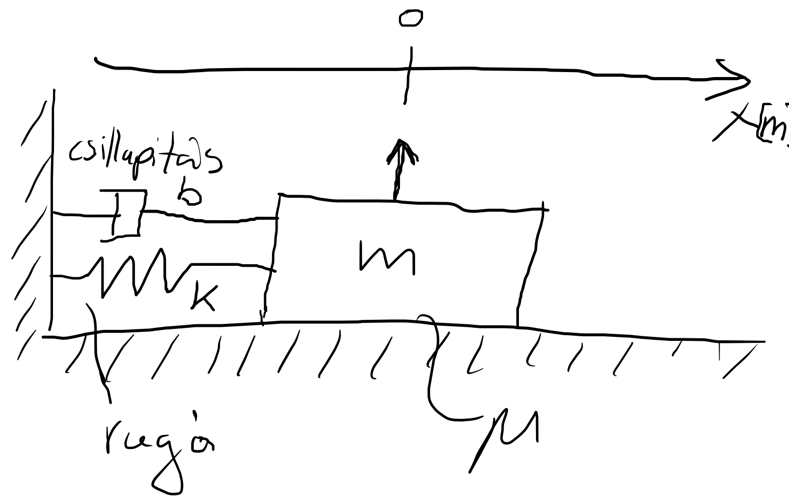
- A robot valamilyen előírt mozgást végez
- Általában a előírt mozgás csuklónként szétcsatolva értelmezhető:



A robot csukló mechanikai modellje

Rotációs

Transzlációs



$m \rightarrow J$: tehetetlenségi nyomaték $[kgm^2]$

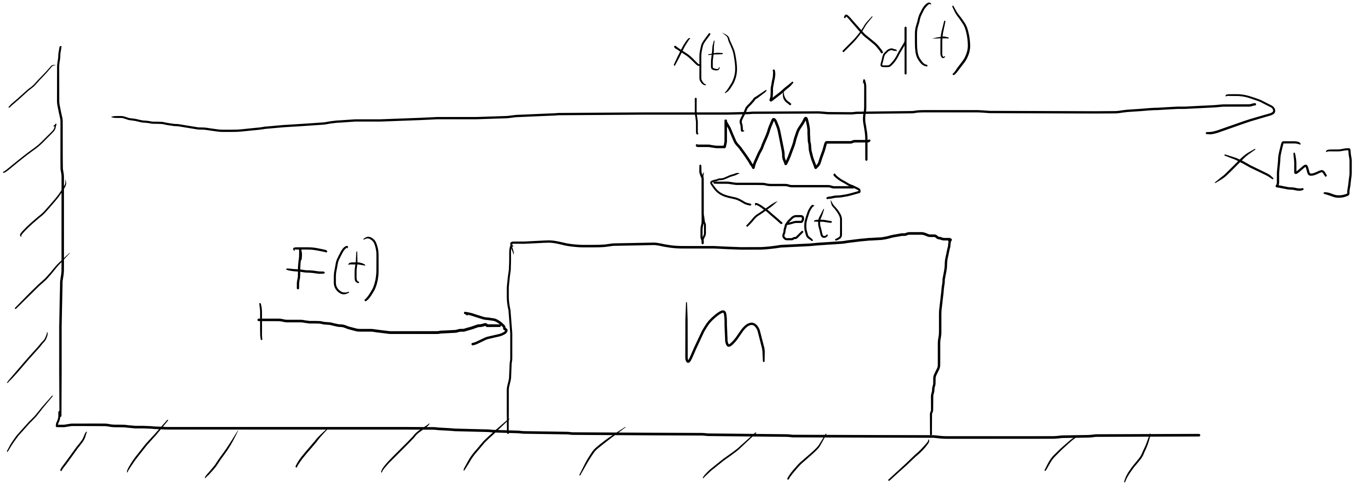
k_t: torziós merevség $\left[\frac{Nm}{rad}\right]$

b_t: torziós csillapítás $\left[\frac{Nms}{rad}\right]$

m: tömeg $[kg]$

k: merevség $[N/m]$

b: csillapítás $\left[\frac{Ns}{m}\right]$



Cél: $F(t)$-t úgy irányítani, hogy

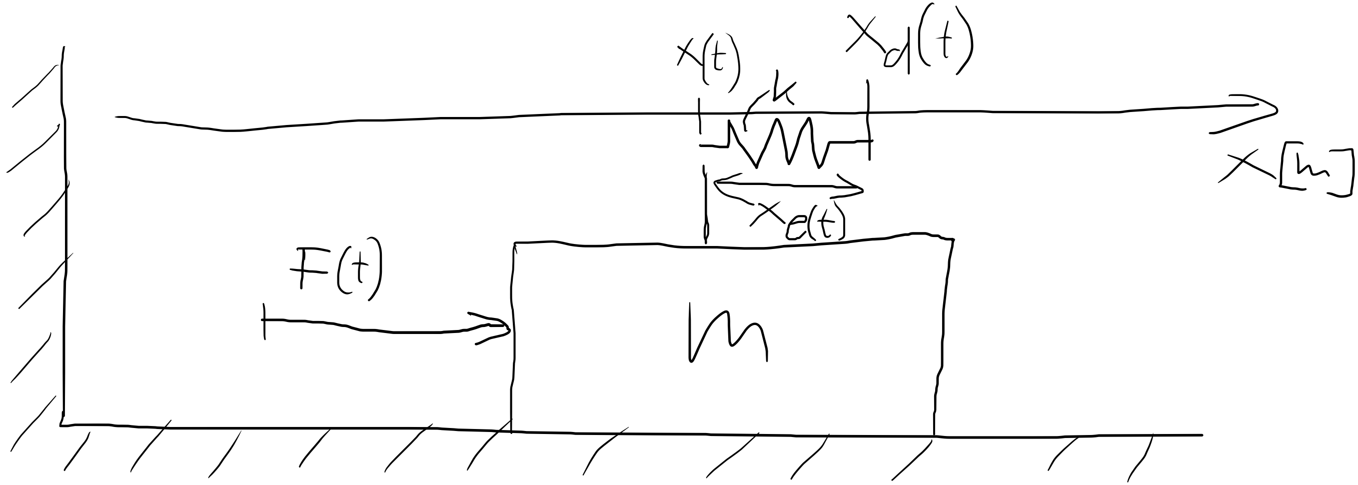
$$x_e(t) \rightarrow 0$$

1. Arányos beavatkozás

$$F(t) = x_e(t) \cdot k \quad [m] \cdot \left[\frac{N}{m}\right] = [N]$$

$\rightarrow$ Oszcilláció Potenciális $\longleftrightarrow$ kinetikus

$$\frac{1}{2} k x^2 \qquad \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$



Cél: F(t)-t úgy irányítani, hogy

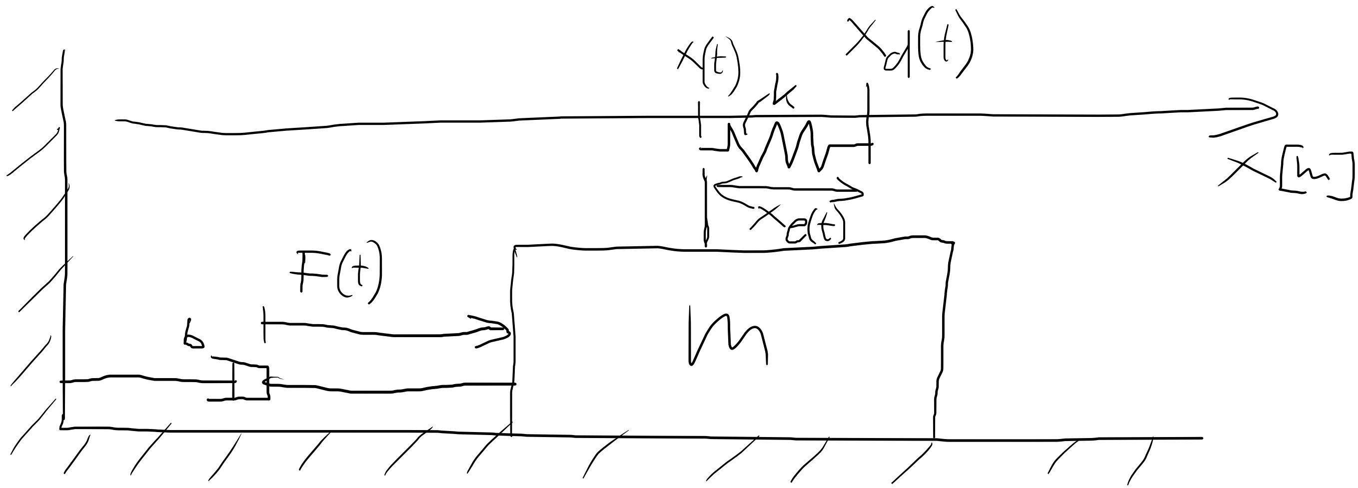
$$x_e(t) \to 0$$

1. Arányos beavatkozás

$$F_k(t) = x_e(t) \cdot k \qquad [m] \cdot \left[\frac{N}{m}\right] = [N]$$

→ Oszcilláció   Potenciális ⟷ kinetikus

$$\frac{1}{2} k x^2 \qquad \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$



Cél: F(t)-t úgy irányítani, hogy

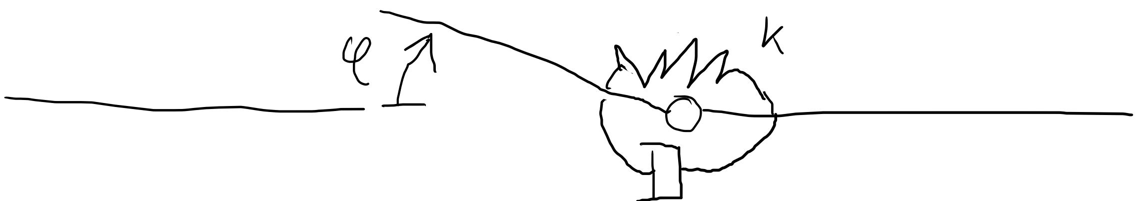
$$x_e(t) \to 0$$

2. Differenciáló hatás

$$F_b(t) = -b \cdot \dot{x}_e(t) \quad \left[\frac{Ns}{m}\right] \cdot \left[\frac{m}{s}\right] = [N]$$

Gyakorlati példa:

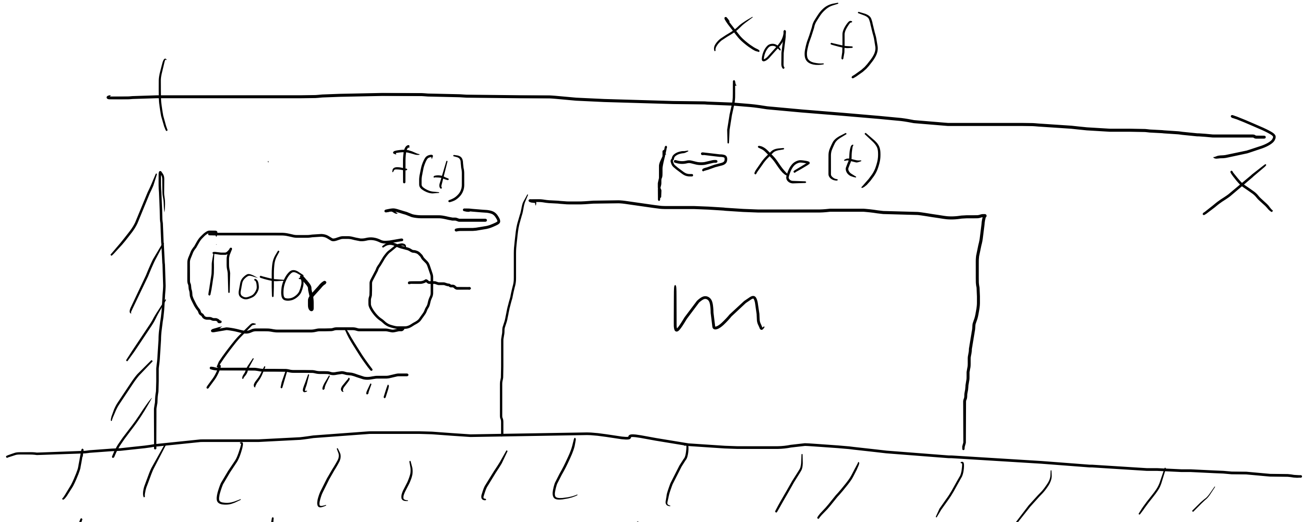
Lengőajtó



$\varphi_d = 0 =$ állandó

- Ne legyen lengés
- Finoman csukódjon
- Ne legyen túl lassú

Gyakorlati megvalósítás a robotok esetében



Feladat: $x_e(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

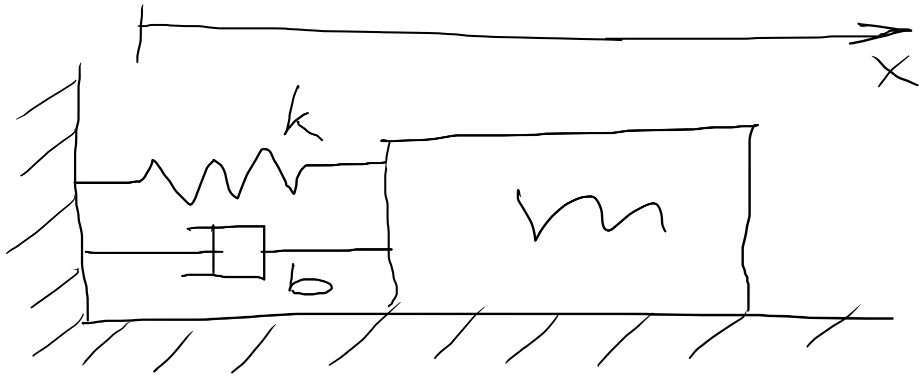
- gyors
- pontos
- stabil

$x_e(t)$-t mérjük

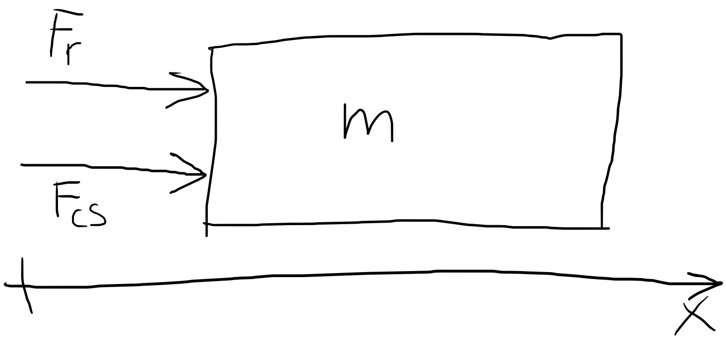
$F(t)$-t számítjuk

A motort ennek megfelelően vez.

Mechanikai modell



Szabadtest ábra



Mozgásegyenlet

Newton II. alapján

$$\sum F = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_r + F_{cs} = m \cdot \ddot{x}$$

Mozgásegyenlet folyt.

$$F_r + F_{cs} = m\ddot{x}$$

$$k \cdot x + b \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + b \cdot \dot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Csillapított szabadlengés mozgásegyenlete

EOM = Equation of Motion

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

- homogén
- lineáris
- másodrendű
- állandó együtthatós
- közönséges

differenciálegyenlet

A mozgásegyenlet megoldása

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Célszerű helyettesítéssel:

$$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0$$

ahol

$\alpha \left[\frac{1}{s}\right]$ $\overset{\text{rad}}{=}$ A csillapítatlan rendszer saját körfrekvenciája

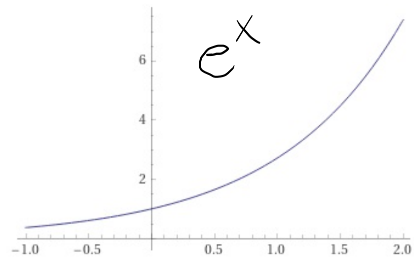
$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$D\,[1]$ Relatív csillapítási tényező $\left[\frac{\frac{Ns}{m}}{kg\frac{1}{s}}\right] = \left[\frac{kgm\frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{m}}{\frac{kg}{s}}\right] = 1$

$$D = \frac{b}{2m\alpha}$$

Megoldás exponenciális próbafüggvénnyel

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t} \qquad A, \lambda \in \mathbb{C}$$



$$\dot{x}(t) = \lambda A \cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 A \cdot e^{\lambda t}$$

behelyettesítve:

$$\underbrace{\left(\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2\right)}_{=0}\;\Leftarrow\;\underbrace{A e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

karakterisztikus egyenlet

karakterisztikus gyökök

$$\boxed{\lambda^2 + 2D\alpha\lambda + \alpha^2 = 0}$$

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2-1}$$

Három fontos eset

1. $\boxed{0 \le D < 1}$ $\longrightarrow$ $\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm i\gamma \in \mathbb{C}$

$$\gamma = \alpha\sqrt{1-D^2} \quad \left[\frac{1}{s}\right]^{rad}$$

a csillapított rendszer saját körfrekvenciája

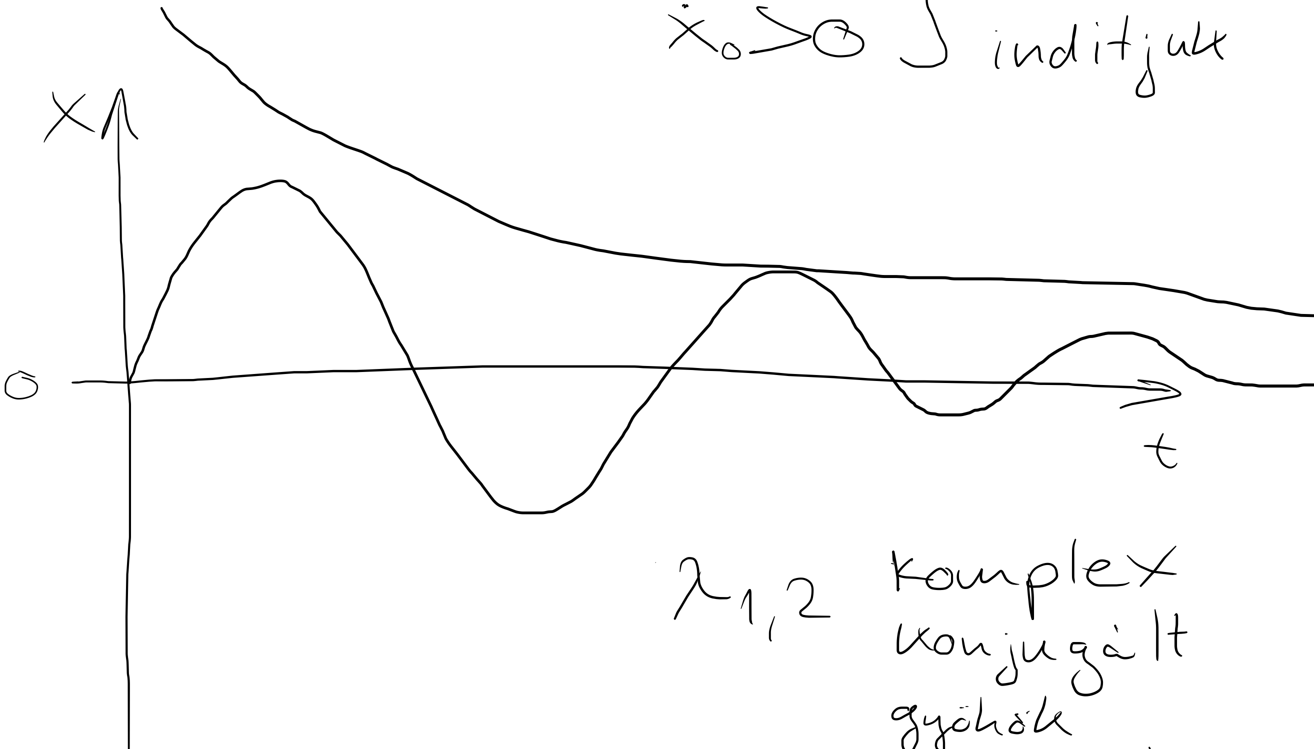
$$x(t) = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} =$$

$$= C_1 \cdot e^{-D\alpha t} \cdot \cos(\gamma t) + C_2 \cdot e^{-D\alpha t} \cdot \sin(\gamma t), \text{ ahol}$$

C_1 és C_2 $\left.\begin{matrix} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{matrix}\right\}$ kezdeti feltételből adódnak

$\boxed{0 \le D \le 1}$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \dot{x}_0 > 0 \end{array}\right\}$ ütközéssel inditjuk

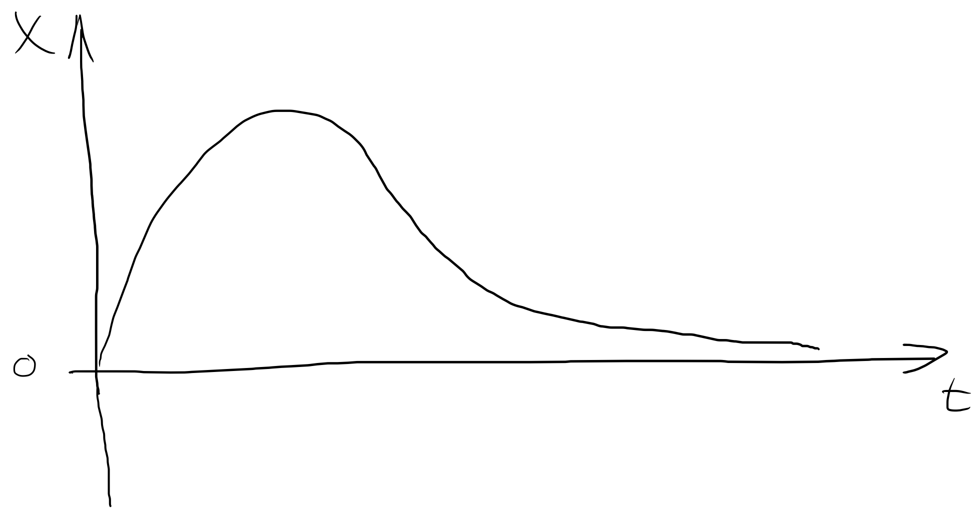


$\lambda_{1,2}$ komplex konjugált gyökök (pólusok)

② $D=1$ kritikus csillapítás

$$\lambda_{1,2} = -\alpha$$

általános megoldás $x(t) = (c_1 + c_2 t) \cdot e^{-\alpha t}$

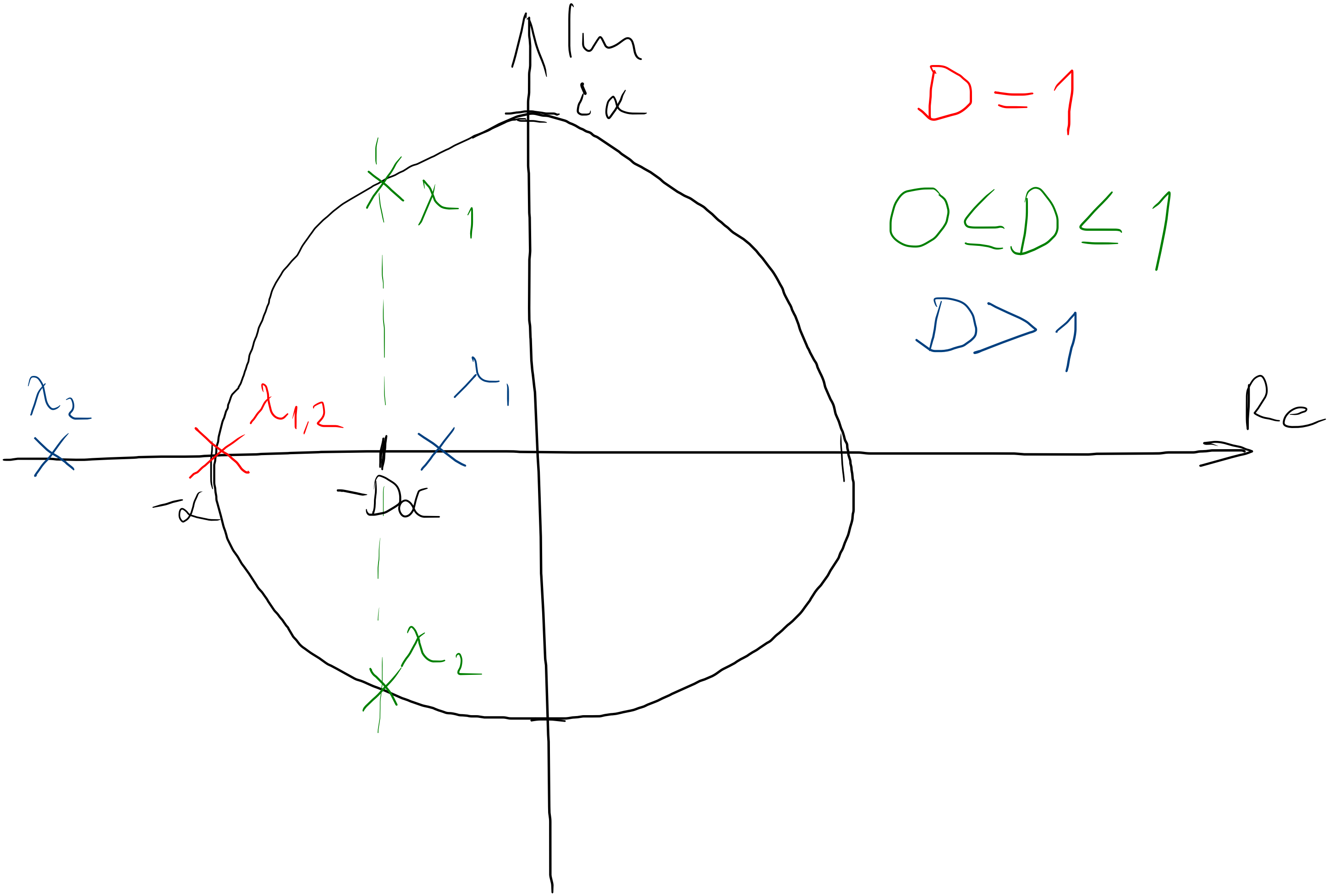


③ $D > 1$ túlcsillapított rendszer

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ valós gyökök

$$x(t) = A_1 \cdot e^{\left(-D\alpha + \alpha\sqrt{D^2-1}\right)t} + A_2 \cdot e^{\left(-D - \alpha\sqrt{D^2-1}\right)t}$$

Lassabban csillapodik


Im
$i\alpha$
Re
$-\alpha$
$-D\alpha$
λ_1
λ_2
$\lambda_{1,2}$
λ_1
λ_2
$D=1$
$0 \le D \le 1$
$D > 1$

Próbáljuk ki!

https://www.geogebra.org/m/sAAwEXgy
https://www.math.ksu.edu/~albin/apps/mass_spring.html
https://www.myphysicslab.com/springs/single-spring-en.html

MATLAB live example:
https://www.mathworks.com/help/symbolic/physics-damped-harmonic-oscillator.html

MATLAB @ OE:
https://www.mathworks.com/academia/tah-portal/obudai-egyetem-31149249.html

Eddig lényegében a PD szabályzót vizsgáltuk.

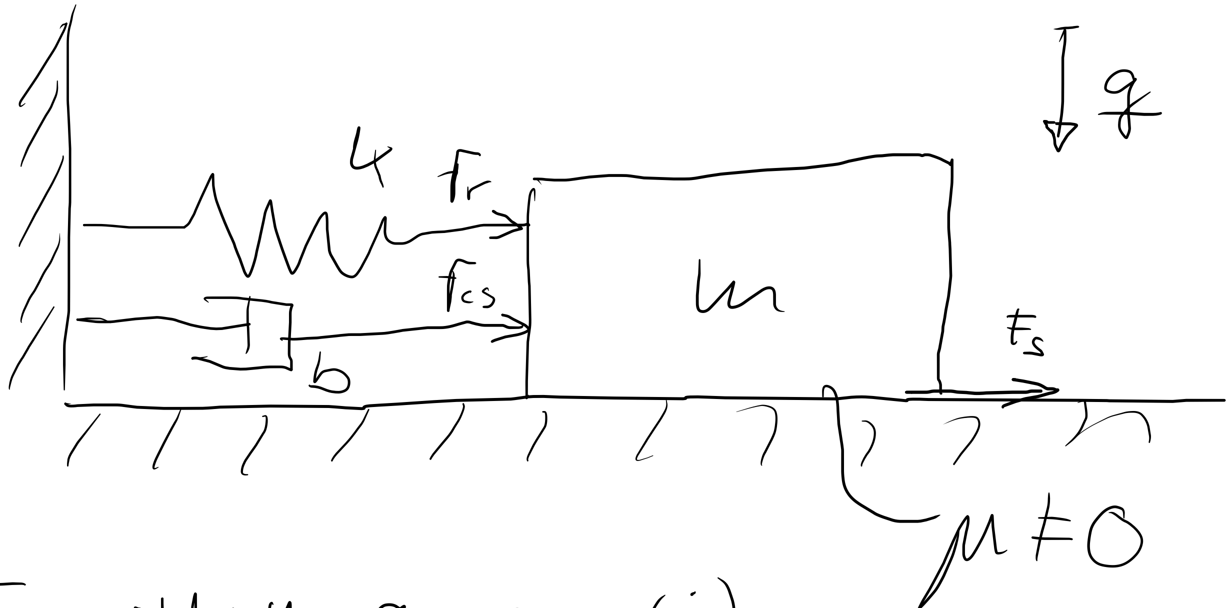
Mi ezzel a baj?

gyors? Igen

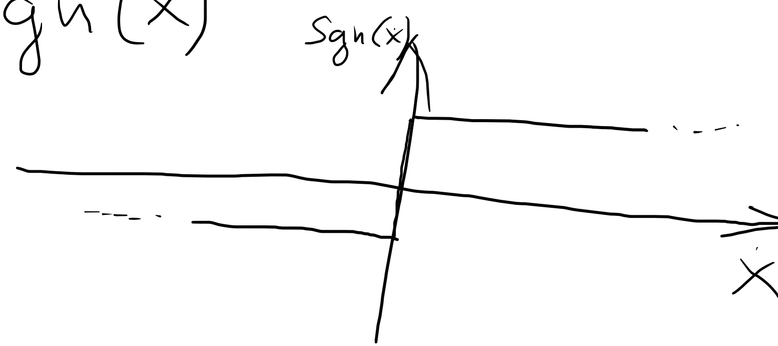
stabil? Igen

pontos? Nem → súrlódás

Digit. eset nem ennyire easy



$$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \mathrm{sgn}(\dot{x})$$



Következtetés:

Ha van száraz súrlódás, akkor bármilyen nagy P mellett

(k mellett)

is lesz maradó hiba!

Megoldás:

Integráló hatás

$$F_I(t) = \int_0^t x_e(t)\,dt \cdot I \qquad [N] = \left[\frac{Nms}{ms}\right]$$

$$[ms] \qquad \left[\frac{N}{ms}\right]$$

A szabályozási törvény összegezve:

$$F(t) = \underbrace{P \cdot x_e(t)}_{k \cdot x} + \underbrace{D \cdot \dot{x}_e(t)}_{b \cdot \dot{x}} + I \cdot \int_0^t x_e(t)\,dt$$